Exempel

Beräkna (om den är konvergent)

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy,$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) d\varphi < \infty?$$

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi$$

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\right)\,d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\right)\,d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\rho^3}\,d\rho$$

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^3} \, d\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_1^n \end{aligned}$$

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4}\rho\, d\rho \right)\, d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4}\rho\, d\rho \right)\, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\rho^3}\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2\rho^2}\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)
\end{aligned}$$

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) \, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\rho^3} \, d\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4} < \infty
\end{aligned}$$

Alterntiv lösning med Fubinis sats

Integranden är positiv.
Området ges i polära koordinater av $1 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\right)\,d\varphi < \infty?$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\right)\,d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^3}\,d\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2\rho^2}\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4} < \infty
\end{aligned}$$

så är integralen konvergent med värdet $\pi/4$.