Exempel

Beräkna, om gränsvärdet existerar:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2},$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2}$$

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2}$$

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2} =$$
$$\rho(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)$$

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2} =$$
$$\rho(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \to$$
$$/\text{Eftersom } (\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \text{ är begränsad}/$$

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2} =$$

$$\rho(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \to$$

$$/\text{Eftersom } (\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \text{ är begränsad}/$$

$$\to 0 \text{ då } \rho \to 0.$$

Lösning (a)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2} =$$
$$\rho(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \to$$
$$/\text{Eftersom } (\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \text{ är begränsad}/$$
$$\to 0 \text{ då } \rho \to 0.$$

Eftersom $\rho \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$ får vi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}$$

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \to$$

$$\frac{1}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \text{ då } \rho \to 0.$$

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \to \frac{1}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \text{ då } \rho \to 0.$$

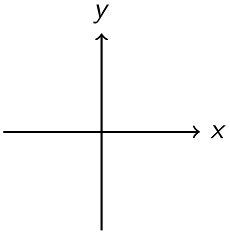
Detta beror dock på φ. T.ex. om vi tar $\varphi = 0$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva x-axeln får vi 1, och om vi tar $\varphi = \pi/2$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva y-axeln får vi -1.

Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \to$$
$$\frac{1}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \text{ då } \rho \to 0.$$

Detta beror dock på φ. T.ex. om vi tar $\varphi = 0$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva x-axeln får vi 1, och om vi tar $\varphi = \pi/2$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva y-axeln får vi -1.



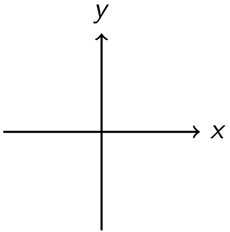
Lösning (b)

Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \to$$

$$\frac{1}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \text{ då } \rho \to 0.$$

Detta beror dock på φ. T.ex. om vi tar $\varphi = 0$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva x-axeln får vi 1, och om vi tar $\varphi = \pi/2$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva y-axeln får vi -1.



Alltså existerar inte gränsvärdet.

Lösning (b), Alternativ 2

Vi måste inte införa polära koordinater här.

Lösning (b), Alternativ 2

Vi måste inte införa polära koordinater här. Om vi går in mot $(0,0)$ längs x-axeln får vi när vi sätter $y = 0$ i uttrycket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Lösning (b), Alternativ 2

Vi måste inte införa polära koordinater här. Om vi går in mot $(0,0)$ längs x-axeln får vi när vi sätter $y = 0$ i uttrycket:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

När vi går längs med y-axeln får vi istället

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Lösning (b), Alternativ 2

Vi måste inte införa polära koordinater här. Om vi går in mot $(0,0)$ längs x-axeln får vi när vi sätter $y = 0$ i uttrycket:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

När vi går längs med y-axeln får vi istället

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.