

Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Med sfäriska koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$ får vi

$$\frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Med sfäriska koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$ får vi

$$\frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta r \cos \theta}{r^2}$$

Med sfäriska koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} &= \\ \frac{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta r \cos \theta}{r^2} &= \\ r(\cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

Med sfäriska koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} &= \\ \frac{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta r \cos \theta}{r^2} &= \\ r(\cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta) &\rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Med sfäriska koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} &= \\ \frac{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta r \cos \theta}{r^2} &= \\ r(\cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta) &\rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Eftersom $r \rightarrow 0$ då $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ får vi:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$