

Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2}.$$

Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2}$$

Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} = \frac{\rho^4}{\rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}$$

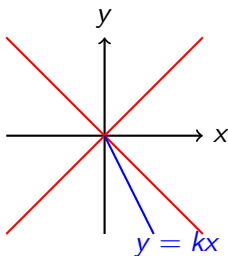
Med polära koordinater $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ får vi

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} = \frac{\rho^4}{\rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)} = \frac{\rho^2}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}.$$

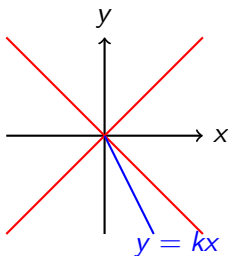
Vi ser att nämnaren i uttrycket $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$ blir noll då $y = \pm x$.

Lösning

Vi ser att nämnaren i uttrycket $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$ blir noll då $y = \pm x$.

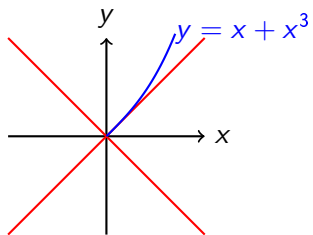


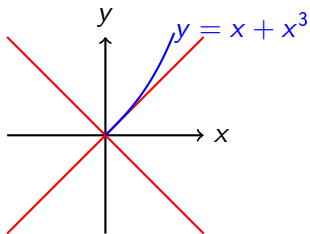
Vi ser att nämnaren i uttrycket $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$ blir noll då $y = \pm x$.



Om vi tar gränsvärdet längs räta linjer $y = kx$ (eller $x = 0$) med $k \neq \pm 1$ så får vi

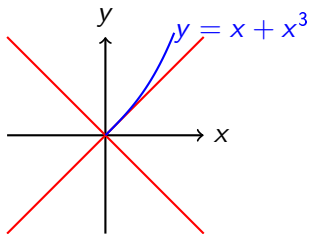
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + k^2 x^2)^2}{(x^2 - k^2 x^2)} = \dots = 0.$$





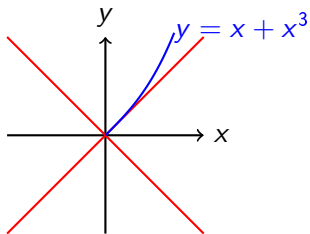
Om vi går in längs med $y = x + x^3$, $x > 0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + (x + x^3)^2)^2}{x^2 - (x + x^3)^2}$$



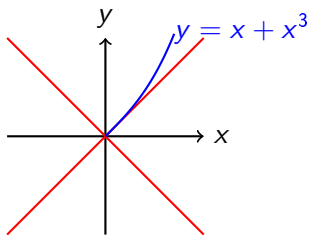
Om vi går in längs med $y = x + x^3$, $x > 0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + (x + x^3)^2)^2}{x^2 - (x + x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + 2x^4 + x^6)^2}{-2x^4 - x^6}$$



Om vi går in längs med $y = x + x^3$, $x > 0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + (x + x^3)^2)^2}{x^2 - (x + x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + 2x^4 + x^6)^2}{-2x^4 - x^6} = \dots = -2.$$



Om vi går in längs med $y = x + x^3$, $x > 0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + (x + x^3)^2)^2}{x^2 - (x + x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + 2x^4 + x^6)^2}{-2x^4 - x^6} = \dots = -2.$$

Eftersom vi hittat två kurvor som går in mot punkten som ger olika gränsvärden existerar inte gränsvärdet.