Exempel

Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+3y^2}.$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+3y^2}\right|$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} \right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+3y^2}\right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2}$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+3y^2}\right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2}$$
$$= x^2+y^2 \to 0 \text{ då } (x,y)\to(0,0).$$

$$\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2+3y^2} = \frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} =$$

$$\frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} =$$

$$\rho^2 \cdot \frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2+3y^2} =$$
$$\frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} =$$
$$\rho^2 \cdot \frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} \to 0 \text{ då } \rho \to 0,$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2+3y^2} =$$

$$\frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} =$$

$$\rho^2 \cdot \frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} \to 0 \text{ då } \rho \to 0,$$

eftersom

$$\left|\frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{1 + 2\sin^2\varphi}\right| \leq 1,$$

då $|\cos\varphi| \leq 1$, $|\sin\varphi| \leq 1$ och $2\sin^2\varphi \geq 0$.