

Exempel

Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 3y^2}.$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} \right|$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} \right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} \right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2}$$

Lösning: Alternativ 1

$$\begin{aligned}\left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} \right| &\leq \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} \\ &= x^2 + y^2 \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0).\end{aligned}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2}$$

Lösung: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} = \frac{\rho^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\rho^2(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)}$$

Lösung: Alternativ 2

$$\begin{aligned}\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} &= \\ \frac{\rho^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\rho^2(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)} &= \\ \rho^2 \cdot \frac{\cos \varphi \sin^3 \varphi}{(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)}\end{aligned}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\begin{aligned}\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} &= \\ \frac{\rho^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\rho^2(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)} &= \\ \rho^2 \cdot \frac{\cos \varphi \sin^3 \varphi}{(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)} &\rightarrow 0 \text{ då } \rho \rightarrow 0,\end{aligned}$$

Lösning: Alternativ 2

$$\begin{aligned}\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} &= \\ \frac{\rho^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\rho^2(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)} &= \\ \rho^2 \cdot \frac{\cos \varphi \sin^3 \varphi}{(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)} &\rightarrow 0 \text{ då } \rho \rightarrow 0,\end{aligned}$$

eftersom

$$\left| \frac{\cos \varphi \sin^3 \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi} \right| \leq 1,$$

då $|\cos \varphi| \leq 1$, $|\sin \varphi| \leq 1$ och $2 \sin^2 \varphi \geq 0$.