# Exempel

Beräkna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ samt avgör om $f$ är differentierbar i $(0,0)$ om

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h}$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1.$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$

# Lösning

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^6/k^4 - 0}{k}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^6/k^4 - 0}{k} = 0.$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1 \cdot h + 0 \cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1 \cdot h + 0 \cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1 \cdot h + 0 \cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{k^6 - 2h^3k^2 - hk^4}{(h^2+k^2)^{5/2}}$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1\cdot h + 0\cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{k^6 - 2h^3k^2 - hk^4}{(h^2+k^2)^{5/2}} = /h = \rho\cos\varphi,\ k = \rho\sin\varphi/$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1 \cdot h + 0 \cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{k^6 - 2h^3k^2 - hk^4}{(h^2+k^2)^{5/2}} = /h = \rho\cos\varphi,\ k = \rho\sin\varphi/ =$$

$$\frac{\rho^6\sin^6\varphi - 2\rho^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \rho^5\cos\varphi\sin^4\varphi}{\rho^5}$$

# Lösning

$f$ är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f_x'(0,0)h + f_y'(0,0)k + R(h,k)|(h,k)|$$

$$= 0 + 1\cdot h + 0\cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{k^6 - 2h^3k^2 - hk^4}{(h^2+k^2)^{5/2}} = /h = \rho\cos\varphi,\ k = \rho\sin\varphi/ =$$

$$\frac{\rho^6\sin^6\varphi - 2\rho^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \rho^5\cos\varphi\sin^4\varphi}{\rho^5}$$

$$\to -2\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \cos\varphi\sin^4\varphi \text{ då } \rho \to 0.$$

Eftersom detta blir olika för olika $\varphi$ saknas gränsvärdet, och alltså är funktionen inte differentierbar i $(0,0)$.

# Graf