Exempel

Låt $f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2$.
Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i $(1, -1, 4)$.
(* Bestäm funktionalmatrisen $\dfrac{\partial f}{\partial(x, y)}$. Bestäm speciellt $\dfrac{\partial f}{\partial(x, y)}(1, -1)$.)

Lösning

$$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2.$$

Lösning

$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2$.
$f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

Lösning

$f(x,y) = x^2 + 3x^3y^2$.
$f(1,-1) = 4$ så $(1,-1,4)$ ligger på grafen till $z = f(x,y)$.

$$f'_x = 2x + 9x^2y^2, \quad f'_y = 6x^3y, \quad f'_x(1,-1) = 11, \quad f'_y(1,-1) = -6.$$

Lösning

$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2$.
$f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$f_x' = 2x + 9x^2y^2, \quad f_y' = 6x^3y, \quad f_x'(1, -1) = 11, \quad f_y'(1, -1) = -6.$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

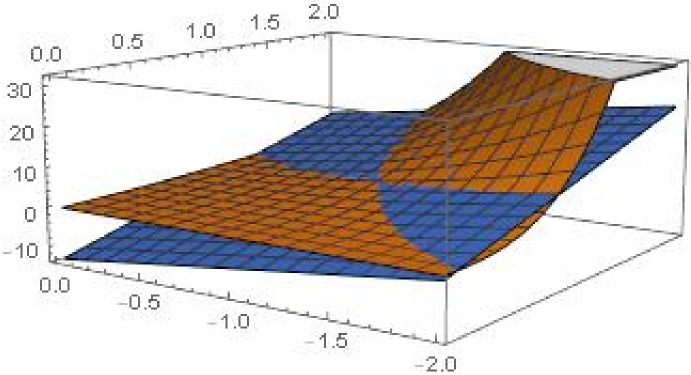
Lösning

$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2$.
$f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$f'_x = 2x + 9x^2y^2, \quad f'_y = 6x^3y, \quad f'_x(1, -1) = 11, \quad f'_y(1, -1) = -6.$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

$$= 4 + 11(x - 1) - 6(y + 1).$$


0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
30
20
10
0
-10
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0

Lösning, alternativ metod med matriser*

$$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2.$$

Lösning, alternativ metod med matriser*

$f(x,y) = x^2 + 3x^3y^2.f(1,-1) = 4$ så $(1,-1,4)$ ligger på grafen till $z = f(x,y)$.

Lösning, alternativ metod med matriser*

$f(x,y) = x^2 + 3x^3y^2 . f(1,-1) = 4$ så $(1,-1,4)$ ligger på grafen till $z = f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Lösning, alternativ metod med matriser*

$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2 . f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}.$$

Lösning, alternativ metod med matriser*

$f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2 . f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(1, -1) = (11 \quad -6).$$

$f(x,y) = x^2 + 3x^3y^2 . f(1,-1) = 4$ så $(1,-1,4)$ ligger på grafen till $z = f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,-1) = (11 \quad -6).$$

$$f(x,y) = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} + R(\bar{h})|\bar{h}|,$$

där $R(\bar{h}) \to 0$ då $\bar{h} = (x-1, y+1) \to 0$.

Lösning, alternativ metod med matriser*

$f(x,y) = x^2 + 3x^3y^2. f(1,-1) = 4$ så $(1,-1,4)$ ligger på grafen till $z = f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,-1) = (11 \quad -6).$$

$$f(x,y) = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} + R(\bar{h})|\bar{h}|,$$

där $R(\bar{h}) \to 0$ då $\bar{h} = (x-1, y+1) \to 0$.
Tangentplanets ekvation blir:

$$z = 4 + (11 \quad -6)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} = 4 + 11(x-1) - 6(y+1).$$