Exempel

Avgör teckenkaraktären till

(a) $Q(h,k) = h^2 + 4hk + k^2$,

(b) $Q(h,k,l) = h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2$.

Lösning (a), alternativ 1

$$h^2 + 4hk + k^2 = (h + 2k)^2 - 4k^2 + k^2$$

Lösning (a), alternativ 1

$$h^2 + 4hk + k^2 = (h + 2k)^2 - 4k^2 + k^2 = (h + 2k)^2 - 3k^2.$$

Lösning (a), alternativ 1

$$h^2 + 4hk + k^2 = (h + 2k)^2 - 4k^2 + k^2 = (h + 2k)^2 - 3k^2.$$

$Q(h, k)$ är indefinit, d.v.s tar både positiva och negativa värden.

Lösning (a), alternativ 2

$$h^2 + 4hk + k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Lösning (a), alternativ 2

$$h^2 + 4hk + k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Lösning (a), alternativ 2

$$h^2 + 4hk + k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Ger värdena $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$.

Lösning (a), alternativ 2

$$h^2 + 4hk + k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Ger värdena $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$.
Så $Q(h,k)$ är indefinit, d.v.s tar både positiva och negativa värden.

Lösning (b)

$$h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2$$

Lösning (b)

$$
\begin{aligned}
&h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\
&= (h + k + l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2
\end{aligned}
$$

Lösning (b)

$$
\begin{aligned}
&h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\
&= (h+k+l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2 \\
&= (h+k+l)^2 + k^2 - 2kl + 2l^2
\end{aligned}
$$

Lösning (b)

$$
\begin{aligned}
&h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\
&= (h + k + l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2 \\
&= (h + k + l)^2 + k^2 - 2kl + 2l^2 \\
&= (h + k + l)^2 + (k - l)^2 - l^2 + 2l^2
\end{aligned}
$$

Lösning (b)

$$\begin{aligned}
&h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\
&= (h + k + l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2 \\
&= (h + k + l)^2 + k^2 - 2kl + 2l^2 \\
&= (h + k + l)^2 + (k - l)^2 - l^2 + 2l^2 \\
&= (h + k + l)^2 + (k - l)^2 + l^2.
\end{aligned}$$

Lösning (b)

$$
\begin{aligned}
&h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\
&= (h+k+l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2 \\
&= (h+k+l)^2 + k^2 - 2kl + 2l^2 \\
&= (h+k+l)^2 + (k-l)^2 - l^2 + 2l^2 \\
&= (h+k+l)^2 + (k-l)^2 + l^2.
\end{aligned}
$$

Så $Q(h,k,l)$ är positivt definit, eftersom $Q(h,k,l) > 0$ om $(h,k,l) \neq (0,0,0)$.