Exempel

Avgör om

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $(0, 0, 0)$.

Lösning

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

Lösning

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

$$f(0,0,0) = 0.$$

Lösning

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

$$f(0,0,0) = 0.$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2x + 2z - 2xz, 2y, 2x + 4z - x^2),$$

Lösning

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

$$f(0,0,0) = 0.$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2x + 2z - 2xz, 2y, 2x + 4z - x^2),$$

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0).$$

Lösning

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

$$f(0,0,0) = 0.$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2x + 2z - 2xz, 2y, 2x + 4z - x^2),$$

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0).$$

Alltså är $(0,0,0)$ en kritisk punkt (annars hade svaret på frågan direkt varit att det inte kan vara lokalt max/min).

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0,0,0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0,0,0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0,0,0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0,0,0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen ges av (med $\bar{0} = (0,0,0)$)

$$\frac{f''_{xx}(\bar{0})}{2}x^2 + f''_{xy}(\bar{0})xy + f''_{xz}(\bar{0})xz + \frac{f''_{yy}(\bar{0})}{2}y^2 + f''_{yz}(\bar{0})yz + \frac{f''_{zz}(\bar{0})}{2}z^2$$

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0,0,0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0,0,0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen ges av (med $\bar{0} = (0,0,0)$)

$$\frac{f''_{xx}(\bar{0})}{2}x^2 + f''_{xy}(\bar{0})xy + f''_{xz}(\bar{0})xz + \frac{f''_{yy}(\bar{0})}{2}y^2 + f''_{yz}(\bar{0})yz + \frac{f''_{zz}(\bar{0})}{2}z^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2$$

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0,0,0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0,0,0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen ges av (med $\bar{0} = (0,0,0)$)

$$\frac{f''_{xx}(\bar{0})}{2}x^2 + f''_{xy}(\bar{0})xy + f''_{xz}(\bar{0})xz + \frac{f''_{yy}(\bar{0})}{2}y^2 + f''_{yz}(\bar{0})yz + \frac{f''_{zz}(\bar{0})}{2}z^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2 = (x+z)^2 + y^2 + z^2.$$

Lösning

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0,0,0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0,0,0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen ges av (med $\bar{0} = (0,0,0)$)

$$\frac{f''_{xx}(\bar{0})}{2}x^2 + f''_{xy}(\bar{0})xy + f''_{xz}(\bar{0})xz + \frac{f''_{yy}(\bar{0})}{2}y^2 + f''_{yz}(\bar{0})yz + \frac{f''_{zz}(\bar{0})}{2}z^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2 = (x+z)^2 + y^2 + z^2.$$

Eftersom denna alltså är positivt definit har vi ett lokalt minimum i $(0,0,0)$.