Exempel

Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

Lösning

$$f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

Lösning

$$f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

$$\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y).$$

Lösning

$$f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

$$\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y).$$

$$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 6x^2 = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases}$$

Lösning

$$f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

$$\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 6x^2 = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - x^2 = 0. \end{cases}$$

Lösning

$$f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

$$\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 6x^2 = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - x^2 = 0. \end{cases}$$

Vi har alltså de två kritiska punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

$(0,0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

$(0,0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(0,0) = 0$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(h,k) = \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}h^2 + f''_{xy}(0,0)hk + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$

$(0, 0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(0,0) = 0$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(h,k) = \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}h^2 + f''_{xy}(0,0)hk + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$
$$= 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$

$(0,0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(0,0) = 0$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned} f(h,k) &= \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}h^2 + f''_{xy}(0,0)hk + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\ &= 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) = -3(h-k)^2 + 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3). \end{aligned}$$

$(0,0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(0,0) = 0$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned} f(h,k) &= \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}h^2 + f''_{xy}(0,0)hk + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\ &= 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) = -3(h-k)^2 + 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3). \end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta ingen extrempunkt.

$(1, 1)$

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

$(1,1)$

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(1,1) = 1$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2$$
$$+\mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$

$(1,1)$

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(1,1) = 1$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) &= f(1,1) + \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2 \\ &+ \mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\ &= 1 - 6h^2 + 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) \end{aligned}$$

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(1,1) = 1$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2$$
$$+\mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$
$$= 1 - 6h^2 + 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) =$$
$$1 - 3(h-k)^2 - 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).$$

$(1,1)$

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(1,1) = 1$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2$$
$$+\mathcal{O}(|(h,k)|^3)$$
$$= 1 - 6h^2 + 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) =$$
$$1 - 3(h-k)^2 - 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är negativt definit är detta ett lokalt max.

Graf