Exempel

Avgör var

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}$$

har lokala extrempunkter, samt avgör om det (eventuellt) rör sig om ett maximum eller minimum.

Lösning

$$f(x, y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

Lösning

$$f(x, y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

$$\nabla f = (2xy\mathrm{e}^{x^2-3y^2}, (1-6y^2)\mathrm{e}^{x^2-3y^2}).$$

Lösning

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

$$\nabla f = (2xy\mathrm{e}^{x^2-3y^2}, (1-6y^2)\mathrm{e}^{x^2-3y^2}).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1 - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

Lösning

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

$$\nabla f = (2xy\mathrm{e}^{x^2-3y^2}, (1-6y^2)\mathrm{e}^{x^2-3y^2}).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1-6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1/\sqrt{6}. \end{cases}$$

Lösning

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

$$\nabla f = (2xy\mathrm{e}^{x^2-3y^2}, (1-6y^2)\mathrm{e}^{x^2-3y^2}).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1-6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1/\sqrt{6}. \end{cases}$$

Vi har alltså de två kritiska punkterna $(0, 1/\sqrt{6})$ och $(0, -1/\sqrt{6})$.

$(0, 1/\sqrt{6})$

$$f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = \frac{2}{\sqrt{6}} \mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = -2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

$(0, 1/\sqrt{6})$

$$f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = -2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

$(0, 1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, 1/\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$
\begin{aligned}
&f(h, 1/\sqrt{6}+k) = f(0, 1/\sqrt{6})\\
&+\frac{f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6})}{2}k^2\\
&+\mathcal{O}(|(h, k)|^3)
\end{aligned}
$$

$(0, 1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, 1/\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$
\begin{aligned}
&f(h, 1/\sqrt{6} + k) = f(0, 1/\sqrt{6}) \\
&+ \frac{f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6})}{2} h^2 + f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) hk + \frac{f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6})}{2} k^2 \\
&+ \mathcal{O}(|(h, k)|^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} + \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}} h^2 - \sqrt{6} k^2 + \mathcal{O}(|(h, k)|^3).
\end{aligned}
$$

$(0, 1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, 1/\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned}
&f(h, 1/\sqrt{6}+k) = f(0, 1/\sqrt{6}) \\
&+\frac{f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6})}{2}k^2 \\
&+\mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} + \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}}h^2 - \sqrt{6}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).
\end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta en sadelpunkt.

$$f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = 2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

$$f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = 2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

$(0, -1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, -1/\sqrt{6}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$f(h, -1/\sqrt{6} + k) = f(0, -1/\sqrt{6})$$
$$+\frac{f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0, -1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6})}{2}k^2$$
$$+\mathcal{O}(|(h, k)|^3)$$

$(0, -1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, -1/\sqrt{6}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$
\begin{aligned}
&f(h, -1/\sqrt{6} + k) = f(0, -1/\sqrt{6}) \\
&+\frac{f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0, -1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6})}{2}k^2 \\
&+\mathcal{O}(|(h, k)|^3) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} - \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}}h^2 + \sqrt{6}k^2 + \mathcal{O}(|(h, k)|^3).
\end{aligned}
$$

$(0, -1/\sqrt{6})$

Eftersom $f(0, -1/\sqrt{6}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$
\begin{aligned}
&f(h, -1/\sqrt{6} + k) = f(0, -1/\sqrt{6}) \\
&+\frac{f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0, -1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6})}{2}k^2 \\
&+\mathcal{O}(|(h, k)|^3) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} - \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}}h^2 + \sqrt{6}k^2 + \mathcal{O}(|(h, k)|^3).
\end{aligned}
$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta en sadelpunkt.

Graf