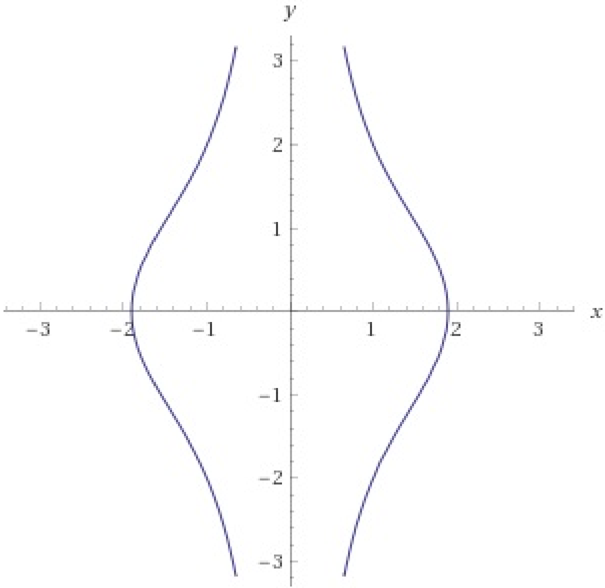
Exempel

Visa att ekvationen

$$x^4 + 3x^2y^2 = 13$$

lokalt i någon omgivning till $(x, y) = (1, 2)$ bestämmer x unikt som funktion av y (d.v.s. lokalt är kurvan en graf $x = x(y)$).
Beräkna även $x'(2)$ och $x''(2)$ för denna funktion.

Graf



Lösning

$$f(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

Lösning

$$f(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1, 2) = 0 \quad \text{OK.}$$

Lösning

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2,$$

Lösning

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 28 \neq 0.$$

Lösning

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 28 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att $x = x(y)$ lokalt på kurvan kring $(1,2)$.

Lösning

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 28 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att $x = x(y)$ lokalt på kurvan kring $(1,2)$.

$$\frac{d}{dy} f(x(y),y) = \frac{d}{dy}(x(y)^4 + 3x(y)^2y^2 - 13)$$

Lösning

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 28 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att $x = x(y)$ lokalt på kurvan kring $(1,2)$.

$$\frac{d}{dy} f(x(y),y) = \frac{d}{dy}(x(y)^4 + 3x(y)^2y^2 - 13)$$

$$= 4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

Lösning

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

Lösning

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

Att $(1, 2)$ ligger på kurvan betyder att $x(2) = 1$.

Lösning

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

Att $(1, 2)$ ligger på kurvan betyder att $x(2) = 1$. Insatt ovan får vi:

$$4x(2)^3x'(2)+6x(2)x'(2)\cdot 2^2+6x(2)^2\cdot 2 = 4x'(2)+24x'(2)+12 = 0.$$

Lösning

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

Att $(1,2)$ ligger på kurvan betyder att $x(2) = 1$. Insatt ovan får vi:

$$4x(2)^3x'(2)+6x(2)x'(2)\cdot 2^2+6x(2)^2\cdot 2 = 4x'(2)+24x'(2)+12 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x'(2) = -12/28 = -3/7.$$

$x''(2)$

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$x''(2)$

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

$$4x(y)^3x''(y) + 12x(y)^2x'(y)^2 + 6x(y)x''(y)y^2 + 6x'(y)^2y^2 +$$
$$+12x(y)x'(y)y + 12x(y)x'(y)y + 6x(y)^2 = 0.$$

$x''(2)$

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

$$4x(y)^3x''(y) + 12x(y)^2x'(y)^2 + 6x(y)x''(y)y^2 + 6x'(y)^2y^2 +$$
$$+12x(y)x'(y)y + 12x(y)x'(y)y + 6x(y)^2 = 0.$$

Om vi då sätter in $x = 1, y = 2$ och $x'(2) = -3/7$ får vi ekvationen

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

$$4x(y)^3x''(y) + 12x(y)^2x'(y)^2 + 6x(y)x''(y)y^2 + 6x'(y)^2y^2 +$$
$$+12x(y)x'(y)y + 12x(y)x'(y)y + 6x(y)^2 = 0.$$

Om vi då sätter in $x = 1, y = 2$ och $x'(2) = -3/7$ får vi ekvationen

$$4x''(2)+12\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^2+6x''(2)\cdot 2^2+6\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^2\cdot 2^2+24\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)\cdot 2+6 = 0.$$

$$4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0.$$

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

$$4x(y)^3x''(y) + 12x(y)^2x'(y)^2 + 6x(y)x''(y)y^2 + 6x'(y)^2y^2 + \\ +12x(y)x'(y)y + 12x(y)x'(y)y + 6x(y)^2 = 0.$$

Om vi då sätter in $x = 1, y = 2$ och $x'(2) = -3/7$ får vi ekvationen

$$4x''(2)+12\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^2+6x''(2)\cdot 2^2+6\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^2\cdot 2^2+24\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)\cdot 2+6 = 0.$$

Detta ger nu

$$x''(2) = 195/686.$$