Exempel

Visa att

$$0 \le \iint_D \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} \le \frac{31}{20}$$

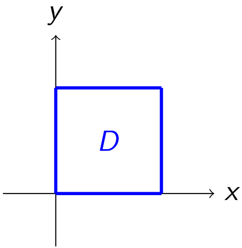
där $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$.

Lösning

Låt $f(x, y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.

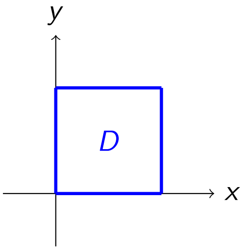
Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.



Lösning

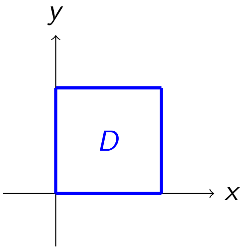
Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.



Eftersom $0 \leq f(x,y) \leq 2/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1$, får vi

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.

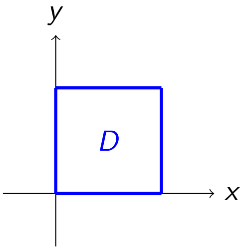


Eftersom $0 \le f(x,y) \le 2/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1$, får vi

$$\iint_D 0 dxdy = 0 \le \iint_D \frac{xdxdy}{6+3x^2-2y} \le \iint_D 1 dxdy = 4.$$

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.

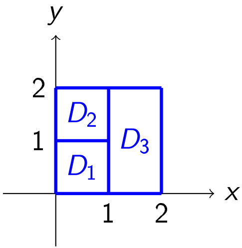


Eftersom $0 \leq f(x,y) \leq 2/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1$, får vi

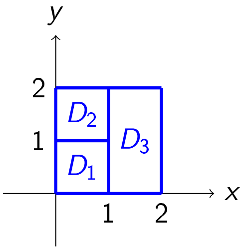
$$\iint_D 0dxdy = 0 \leq \iint_D \frac{xdxdy}{6+3x^2-2y} \leq \iint_D 1dxdy = 4.$$

Detta är dock inte bra nog för den övre uppskattningen ...

Lösning

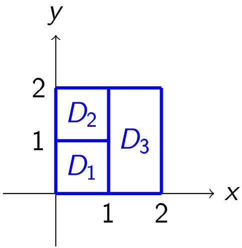


Lösning



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 .$$

Lösning



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

$$\iint_D \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} =$$

$$\iint_{D_1} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} + \iint_{D_2} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} + \iint_{D_3} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y}.$$

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 1) = 1/4$.

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1/2$.

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1/2$.
På D_3 gäller, eftersom $1 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 2/(6+3\cdot 1 - 2\cdot 2) = 2/5$.

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1$ här,
$f(x,y) \le 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \le x \le 1$ och $1 \le y \le 2$ här,
$f(x,y) \le 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1/2$.
På D_3 gäller, eftersom $1 \le x \le 2$ och $0 \le y \le 2$ här,
$f(x,y) \le 2/(6+3\cdot 1 - 2\cdot 2) = 2/5$.
Alltså får vi att

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy$$

Lösning

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0-2\cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0-2\cdot 2) = 1/2$.
På D_3 gäller, eftersom $1 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 2/(6+3\cdot 1-2\cdot 2) = 2/5$.
Alltså får vi att

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy$$

$$I \leq \frac{1}{4}\cdot m(D_1) + \frac{1}{2}\cdot m(D_2) + \frac{2}{5}\cdot m(D_3)$$

Låt $f(x,y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 1/(6+3\cdot 0 - 2\cdot 2) = 1/2$.
På D_3 gäller, eftersom $1 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2$ här,
$f(x,y) \leq 2/(6+3\cdot 1 - 2\cdot 2) = 2/5$.
Alltså får vi att

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy$$

$$I \leq \frac{1}{4}\cdot m(D_1) + \frac{1}{2}\cdot m(D_2) + \frac{2}{5}\cdot m(D_3)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{31}{20}.$$