Trippelintegraler

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

I detta fall har vi ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och en **begränsad** funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ och vill definiera

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega fdxdydz.$$

I detta fall har vi ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och en **begränsad** funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ och vill definiera

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iiint_\Omega fdxdydz.$$

- Om f betecknar densiteten hos en kropp med utbredning Ω, då ska trippelintegralen ge oss den totala massan,

Grundläggande egenskaper

I detta fall har vi ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och en **begränsad** funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ och vill definiera

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega fdxdydz.$$

- Om f betecknar densiteten hos en kropp med utbredning Ω, då ska trippelintegralen ge oss den totala massan,
- Om f betecknar laddningstätheten hos en kropp med utbredning Ω, då ska trippelintegralen ge oss den totala laddningen.

Approximation

Istället för rektanglar som i dubbelintegraler används nu tredimensionella rätblock, d.v.s. mängder K på formen

$$\{(x, y, z) : a < x < b, c < y < d, k < z < r\},$$

med volymen

$$m(K) = (b - a)(d - c)(r - k).$$

Approximation

Istället för rektanglar som i dubbelintegraler används nu tredimensionella rätblock, d.v.s. mängder K på formen

$$\{(x, y, z) : a < x < b, c < y < d, k < z < r\},$$

med volymen

$$m(K) = (b - a)(d - c)(r - k).$$

$$\Omega \approx K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_l,$$

där $\approx$ nu betyder att skillnaden i volym är försumbar, och sådana att f är nästan konstant lika med a_i på K_i.

Approximation

Istället för rektanglar som i dubbelintegraler används nu tredimensionella rätblock, d.v.s. mängder K på formen

$$\{(x, y, z) : a < x < b, c < y < d, k < z < r\},$$

med volymen

$$m(K) = (b - a)(d - c)(r - k).$$

$$\Omega \approx K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_l,$$

där $\approx$ nu betyder att skillnaden i volym är försumbar, och sådana att f är nästan konstant lika med a_i på K_i.

$$\iiint_\Omega f dxdydz \approx a_1 m(K_1) + a_2 m(K_2) + \ldots + a_l m(K_l).$$

Grundläggande egenskaper

Sats

(1) $\iiint_\Omega (af+bg)dxdydz = a\iiint_\Omega fdxdydz + b\iiint_\Omega gdxdydz$ $(a, b \in \mathbb{R},\ f, g\ \textit{integrabla})$.

(2) $\iiint_{\Omega_1\cup\Omega_2} fdxdydz = \iiint_{\Omega_1} fdxdydz + \iiint_{\Omega_2} fdxdydz$ $(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,\ f\ \textit{integrabel})$.

(3) $f \leq g \Rightarrow \iiint_\Omega fdxdydz \leq \iiint_\Omega gdxdydz$ $(f, g\ \textit{integrabla})$. *Speciellt* $\iiint_\Omega fdxdydz \geq 0$ *om* $f \geq 0$.

(4) $\iiint_\Omega dxdydz =$ *Volymen av* Ω.

(5) *(Triangelolikheten)* $\left|\iiint_\Omega fdxdydz\right| \leq \iiint_\Omega |f|dxdydz$ *(f integrabel)*.

Fubinis sats

- Om Ω är på formen $a < z < b$, $(x, y) \in \Omega_z$, då gäller

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dxdy \right) dz.$$

- Om Ω är på formen $(x, y) \in D$, $\alpha(x, y) < z < \beta(x, y)$, då gäller

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

Målet är att i slutändan komma till ett uttryck på formen (med eventuellt omvända roller för några koordinater)

$$\iiint_\Omega f dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\rho(x)}^{\gamma(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx.$$

Variabelbyten i trippelintegraler

Om Ω och D är två områden i $\mathbb{R}^3$ och $\bar{g} = (g_1, g_2, g_3) : D \to \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\dfrac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(u, v, w)} \neq 0$ så gäller med

$$\begin{cases} x = g_1(u, v, w) \\ y = g_2(u, v, w) \\ z = g_3(u, v, w) \end{cases}$$

att

$$\iiint_\Omega f dxdyz = \iiint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$