Generaliserade Integraler

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

- Vi tittar här på generaliserade dubbelintegraler, d.v.s. $\iint_\Omega f dx dy$ där Ω och/eller f eventuellt är obegränsade.

- Vi tittar här på generaliserade dubbelintegraler, d.v.s. $\iint_\Omega f dx dy$ där Ω och/eller f eventuellt är obegränsade.
- Trippelintegraler behandlas helt analogt, där vi nedan byter $\mathbb{R}^2$ mot $\mathbb{R}^3$ och area mot volym, $dxdy$ mot $dxdydz$...

- Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eventuellt vara obegränsat, låt funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eventuellt vara obegränsad.

- Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eventuellt vara obegränsat, låt funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eventuellt vara obegränsad.
- Vi vill då, ifall det är möjligt, definiera

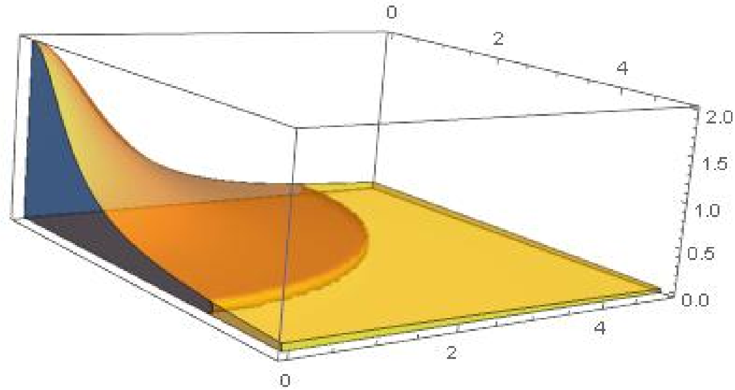
$$\iint_{\Omega} f \, dxdy$$

- Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eventuellt vara obegränsat, låt funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eventuellt vara obegränsad.
- Vi vill då, ifall det är möjligt, definiera

$$\iint_{\Omega} f \, dxdy$$

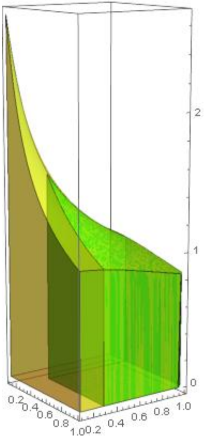
- Vi tillåter mer allmänt f att bara vara definierad på $\Omega \setminus S$ för någon mängd S med area noll.

$f(x) = 2/(1+x^2+y^2)$, $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$



$$\Omega_i = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq i^2\}.$$

$f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^{(1/4)}$, $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$



$$\Omega_i = \{(x, y) : 1/i < x < 1, 1/i < y < 1\}.$$

Uttömmande följd

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ sådan att

Uttömmande följd

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ sådan att

(U1) varje Ω_i är en begränsad delmängd till Ω,

Uttömmande följd

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ sådan att

(U1) varje Ω_i är en begränsad delmängd till Ω,

(U2) f är begränsad (och definierad i alla punkter) på Ω_i för varje i,

Uttömmande följd

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ sådan att

(U1) varje Ω_i är en begränsad delmängd till Ω,

(U2) f är begränsad (och definierad i alla punkter) på Ω_i för varje i,

(U3) $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots)$ har area noll

Uttömmande följd

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ sådan att

(U1) varje Ω_i är en begränsad delmängd till Ω,

(U2) f är begränsad (och definierad i alla punkter) på Ω_i för varje i,

(U3) $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots)$ har area noll

kallas en tillåten uttömande följd till Ω relativt integralen $\iint_\Omega f \, dxdy$.

Definition

Om det finns $I \in \mathbb{R}$ sådant att för varje uttömmande följd till Ω som ovan gäller att

$$\iint_{\Omega_i} f dx dy \to I \text{ då } i \to \infty,$$

då säger vi att f har generaliserad integral I på Ω.
I så fall skriver vi även

$$\iint_{\Omega} f dx dy = I,$$

och säger att integralen är konvergent (annars säger vi att den är divergent).

En skillnad mot fallet med en variabel och denna definition är att vi där, om vi t.ex. ska definiera $\int_0^\infty f(x)dx$ bara ser på den uttömmande följden $[0, i]$, medan vi här skulle tillåta mer allmänna uttömningar. Med envariabeldefinitionen kan man ha funktioner f som är integrabla i denna mening utan att vara absolutintegrabla (t.ex. $\sin(x)/x$). Med ovanstående definition kan inte detta hända (vilket beror på att vi kan tömma ut den del där funktionen är positiv snabbare än den del där den är negativ och vice versa).

Sats

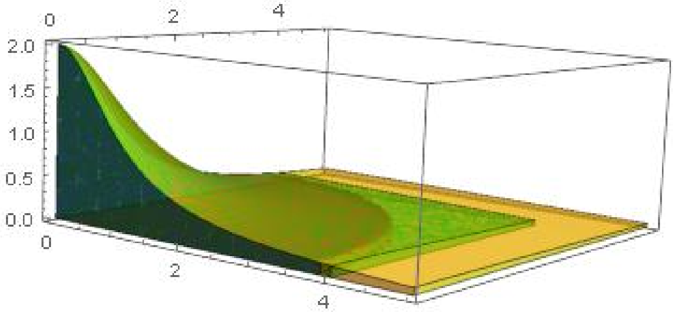
Om $f : \Omega \to [0, \infty]$ och det finns en uttömmande följd Ω_i av Ω sådana att

$$\lim_{i \to \infty} \iint_{\Omega_i} f(x, y) dxdy < \infty,$$

då är f generaliserat integrabel över Ω.

Notera att eftersom $\iint_{\Omega_i} f(x, y) dxdy$ är växande med i om $f \geq 0$, så kommer gränsvärdet existera, men eventuellt vara oändligt.

$f(x) = 2/(1 + x^2 + y^2)$, $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$



$$\Omega_i = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq i^2\},$$

$$D_j = \{(x, y) : 0 < x < j, 0 < y < j\}.$$

Integrander som växlar tecken

Sats

Om $f:\Omega \to \mathbb{R}$ *låt* $\Omega_+ = \{(x,y) : f(x,y) > 0\}$ *och* $\Omega_- = \{(x,y) : f(x,y) < 0\}$*. I så fall är*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

konvergent om och endast om båda integralerna

$$\iint_{\Omega_+} f(x,y)dxdy \quad \text{och} \quad \iint_{\Omega_-} -f(x,y)dxdy$$

är konvergenta. Vidare gäller då att

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_+} f(x,y)dxdy - \iint_{\Omega_-} -f(x,y)dxdy.$$