Variabelbyten och Fubinis sats för generaliserade integraler

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Positiv integrand

Det visar sig att variabelbyten och Fubinis sats faktiskt gäller även för generaliserade integraler om vi har en **positiv** integrand, där vi nu för en positiv integrand skriver

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \infty$$

om den är divergent.

Variabelbyten

Sats (Variabelbyten)

Antag att Ω *och* D *är två områden i* $\mathbb{R}^2$ *och* $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \to \Omega$ *är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med* $\dfrac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$*. Låt*

$$\begin{cases} x = g_1(u, v), \\ y = g_2(u, v). \end{cases}$$

Då gäller för alla $f : \Omega \to [0, \infty]$ *att*

$$\iint_\Omega f dxdy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv.$$

Sats (Variabelbyten)

Antag att Ω *och* D *är två områden i* $\mathbb{R}^2$ *och* $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \to \Omega$ *är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med* $\dfrac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$*. Låt*

$$\begin{cases} x = g_1(u, v), \\ y = g_2(u, v). \end{cases}$$

Då gäller för alla $f : \Omega \to [0, \infty]$ *att*

$$\iint_\Omega f dx dy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

Notera att ovanstående sats ska tolkas som att antingen är båda integralerna konvergenta med samma värde, eller så är båda divergenta (d.v.s. $= \infty$).

Fubinis sats för generaliserade integraler

Sats (Fubini)

Antag att $f : \Omega \to [0, \infty]$ *där*
$\Omega = \{(x, y) : a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}$. *Då gäller att*

$$\iint_\Omega f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Anledningen till att vi här har valt öppna intervall är att eventuellt är $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$. Vi tillåter även $\alpha(x), \beta(x)$ att vara $\pm\infty$ här.

- Anledningen till att vi här har valt öppna intervall är att eventuellt är $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$. Vi tillåter även $\alpha(x), \beta(x)$ att vara $\pm\infty$ här.
- Satsen ska tolkas som att den generaliserade dubbelintegralen är konvergent om och endast om den (eventuellt) generaliserade integralen $\int_a^b g(x)dx$ är konvergent, där

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy.$$

- Anledningen till att vi här har valt öppna intervall är att eventuellt är $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$. Vi tillåter även $\alpha(x), \beta(x)$ att vara $\pm\infty$ här.
- Satsen ska tolkas som att den generaliserade dubbelintegralen är konvergent om och endast om den (eventuellt) generaliserade integralen $\int_a^b g(x)dx$ är konvergent, där

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy.$$

  Detta kräver förstås att den (eventuellt) generaliserade integralen $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ är konvergent för de flesta x (den kan dock vara oändlig för något enstaka x så länge som funktionen $g(x)$ ovan blir generaliserat integrerbar).

Exempel

Vi ser på integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\, dxdy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.

Exempel

Vi ser på integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\, dxdy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.
Eftersom vi har en positiv integrand har vi nu två alternativ.

Exempel

Vi ser på integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\,dxdy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.
Eftersom vi har en positiv integrand har vi nu två alternativ.
Det första alternativet är att vi väljer en uttömning av D, t.ex. med D_n som ges av $0 < x < n$ och $0 < y < n$ och tittar på

$$\iint_{D_n} \mathrm{e}^{-x-y}\,dxdy = \int_0^n \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-y}\,dy \right) dx$$

Vi ser på integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y} dxdy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.
Eftersom vi har en positiv integrand har vi nu två alternativ.
Det första alternativet är att vi väljer en uttömning av D, t.ex. med D_n som ges av $0 < x < n$ och $0 < y < n$ och tittar på

$$\iint_{D_n} \mathrm{e}^{-x-y} dxdy = \int_0^n \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-y} dy \right) dx$$
$$= \left[-\mathrm{e}^{-x} \right]_0^n \cdot \left[-\mathrm{e}^{-y} \right]_0^n = (1 - \mathrm{e}^{-n}) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-n}).$$

Vi ser på integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\, dxdy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.
Eftersom vi har en positiv integrand har vi nu två alternativ.
Det första alternativet är att vi väljer en uttömning av D, t.ex. med D_n som ges av $0 < x < n$ och $0 < y < n$ och tittar på

$$\iint_{D_n} \mathrm{e}^{-x-y}\, dxdy = \int_0^n \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-y}\, dy \right) dx$$
$$= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n \cdot \left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^n = (1 - \mathrm{e}^{-n}) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-n}).$$

Eftersom detta går mot 1 då $n \to \infty$ är integralen konvergent med värdet 1.

Exempel

Det andra alternativet är att vi direkt tillämpar Fubinis sats ovan:

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y} dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x-y} dy \right) dx$$

Det andra alternativet är att vi direkt tillämpar Fubinis sats ovan:

$$\iint_D e^{-x-y}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y}\,dy\right) dx$$
$$= \int_0^\infty [-e^{-y}e^{-x}]_{y=0}^\infty\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Exempel

Det andra alternativet är att vi direkt tillämpar Fubinis sats ovan:

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x-y}\,dy \right) dx$$
$$= \int_0^\infty [-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-x}]_{y=0}^{\infty}\,dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Alltså är integralen konvergent, enligt Fubinis sats, med värdet 1.