Gränsvärden. Kontinuitet

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

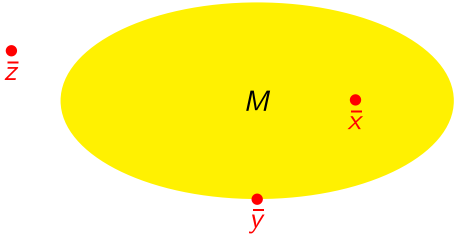
Gränsvärden

Definition (Hopningspunkt)

Givet en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ så säger vi att $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till M om det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $\bar{y} \in M \setminus \{\bar{x}\}$ sådan att $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$.

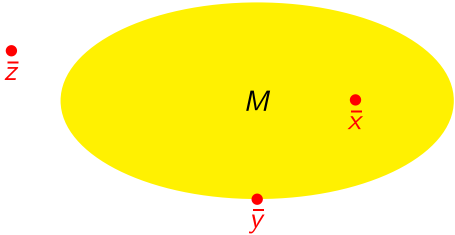
Definition (Hopningspunkt)

Givet en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ så säger vi att $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till M om det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $\bar{y} \in M \setminus \{\bar{x}\}$ sådan att $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$.



Definition (Hopningspunkt)

Givet en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ så säger vi att $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till M om det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $\bar{y} \in M \setminus \{\bar{x}\}$ sådan att $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$.



Gränsvärden

Definition

Låt $\bar{f} : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ där $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$, och antag att $\bar{a}$ är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}}$. Vi säger då att $\bar{f}$ har gränsvärde $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ i $\bar{a}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$|\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_{\bar{f}} \setminus \{\bar{a}\} \Rightarrow |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \varepsilon.$$

Vi skriver i så fall

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}.$$

Sats

Antag att h är en reellvärd funktion definierad på något intervall $]0, \varepsilon[$ där $\varepsilon > 0$ och sådan att $\lim_{r \to 0^+} h(r) = 0$. Om det finns $\delta > 0$ sådant att

$$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| \leq h(|\bar{x} - \bar{a}|) \text{ för alla } \bar{x} \in (B(\bar{a}, \delta) \cap D_{\bar{f}}) \setminus \{\bar{a}\},$$

då har $\bar{f}$ gränsvärde $\bar{b}$ i $\bar{a}$.

Sats

Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ *(*$D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$*),* $\bar{a}$ *är en hopningspunkt till* $D_{\bar{f}}$ *och att* $\bar{f}$ *har gränsvärde* $\bar{b}$ *i* $\bar{a}$*. Om* $\bar{r} : [c, d] \to D_{\bar{f}} \cup \{\bar{a}\}$ *är en kontinuerlig parameterkurva sådan att*

- $\bar{r}(c) = \bar{a}$,
- $\bar{r}(t) \in D_{\bar{f}} \setminus \{\bar{a}\}$ *om* $c < t \leq d$,

då gäller

$$\lim_{t \to c^+} \bar{f}(\bar{r}(t)) = \bar{b}. \tag{1}$$

Sats

Antag att $\bar{f}$ och $\bar{g}$ är funktioner av n variabler som tar värden i $\mathbb{R}^m$, där $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}_1$ och $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b}_2$, då gäller

(a) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} (\alpha\bar{f}(\bar{x}) + \beta\bar{g}(\bar{x})) = \alpha\bar{b}_1 + \beta\bar{b}_2$ *för alla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) \bullet \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2$,

(c) *Om* $m = 1$ *och* $\bar{b}_2 \neq 0$ *gäller* $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{\bar{f}(\bar{x})}{\bar{g}(x)} = \dfrac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2}$.

(Notera att en del av påståendet är att gränsvärdena i (a) – (c) ovan existerar under dessa förutsättningar.)

Sats

Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ *och* $\bar{g} : D_{\bar{g}} \to \mathbb{R}^k$, $\bar{a}$ *och* $\bar{b}$ *är hopningspunkter till* $D_{\bar{f}}$ *respektive* $D_{\bar{g}}$ *och dessa uppfyller*

(a) $\bar{f}(\bar{x}) \to \bar{b}$ *då* $\bar{x} \to \bar{a}$ *och* $\bar{g}(\bar{y}) \to \bar{c}$ *då* $\bar{y} \to \bar{b}$,

(b) *det finns ett öppet klot* $B(\bar{a}, \varepsilon)$ *sådant att* $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{b}$ *om* $\bar{x} \in (B(\bar{a}, \varepsilon) \cap D_{\bar{f}}) \setminus \{\bar{a}\}$.

(c) *det finns punkter* $\bar{x} \neq \bar{a}$ *godtyckligt nära* $\bar{a}$ *sådana att* $\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$ *är definierat.*

Då gäller att

$$\bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \to \bar{c} \text{ då } \bar{x} \to \bar{a}.$$

Sats

Om $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ *då gäller*

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

om och endast om

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_j(\bar{x}) = y_j$$

för varje $1 \leq j \leq m$.

Definition

Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ där $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$, och att det för varje $R > 0$ finns punkter $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$ med $|\bar{x}| > R$. Om $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns $R > 0$ så att

$$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \varepsilon \text{ för alla } \bar{x} \in D_{\bar{f}} \text{ med } |\bar{x}| > R.$$

I så fall säger vi att $\bar{f}(\bar{x})$ har gränsvärde $\bar{b}$ då $|\bar{x}| \to \infty$ och skriver

$$\lim_{|\bar{x}| \to \infty} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}.$$

Kontinuerliga funktioner

Definition

Om $\bar{f} : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ $(D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n)$ och $\bar{a}$ ligger i $D_{\bar{f}}$, då sägs $\bar{f}$ vara kontinuerlig i $\bar{a}$ om antingen:

- $\bar{a}$ inte är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}}$,
  eller
- $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{a})$.

Om $\bar{f}$ är kontinuerlig i alla punkter i $D_{\bar{f}}$ sägs $\bar{f}$ vara kontinuerlig.

Sats

Om $\bar{f}$ är kontinuerlig i $\bar{a}$ och $\bar{g}$ är kontinuerlig i $\bar{f}(\bar{a})$, i så fall är den **sammansatta funktionen** $\bar{g} \circ \bar{f}$ *definierad (i de punkter $\bar{x}$ där detta är meningsfullt) via*

$$(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}) := \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})),$$

kontinuerlig i $\bar{a}$.

Kontinuerliga funktioner

Med uttryck som $f + g$, $f \cdot g$ menas alltid funktioner definierade punktvis, t.ex. $(f+g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) + g(\bar{x})$.

Sats

Om $f, g : M \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga så gäller:

(1) $kf : M \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig för alla* $k \in \mathbb{R}$,

(2) $f + g : M \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig,*

(3) $f \cdot g : M \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig,*

(4) $f/g : M \setminus \{\bar{x} \in M : g(\bar{x}) = 0\} \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig.*