Differentierbarhet

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Derivatan i envariabelanalysen

Antag att $f : D_f \to \mathbb{R}$ där $D_f \subset \mathbb{R}$, då är f deriverbar i a om och endast om det finns ett reellt tal $f'(a)$ sådant att

$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{|h|} \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Derivatan i envariabelanalysen

Antag att $f : D_f \to \mathbb{R}$ där $D_f \subset \mathbb{R}$, då är f deriverbar i a om och endast om det finns ett reellt tal $f'(a)$ sådant att

$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{|h|} \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Notera att detta medför att vi har

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)|h|.$$

Derivatan i envariabelanalysen

Antag att $f : D_f \to \mathbb{R}$ där $D_f \subset \mathbb{R}$, då är f deriverbar i a om och endast om det finns ett reellt tal $f'(a)$ sådant att

$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{|h|} \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Notera att detta medför att vi har

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)|h|.$$

Notera att grafen till funktionen av h som ges av

$$y = f(a) + f'(a)h,$$

är tangentlinjen till f:s graf i $(a, f(a))$.

Tangentplan till funktioner av två variabler

Ett plan i (x, y, z)-rummet som inte är parallell med z-axeln och som går genom punkten $(a, b, f(a, b))$ kan skrivas på formen

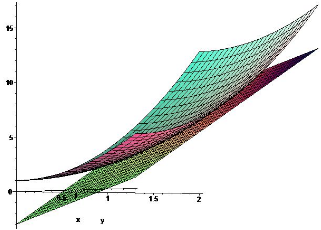
$$z = f(a, b) + A_1(x - a) + A_2(y - b)$$

på ett entydigt sätt.

Ett plan i (x, y, z)-rummet som inte är parallell med z-axeln och som går genom punkten $(a, b, f(a, b))$ kan skrivas på formen

$$z = f(a, b) + A_1(x - a) + A_2(y - b)$$

på ett entydigt sätt.
Nedan är funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 + 3y^2$ plottad tillsammans med sitt tagentplan i $(1, 1)$:



Tangentplan till funktioner av två variabler

Definition

Vi säger att $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) om det finns A_1, A_2 sådana att, om vi sätter $(h, k) = (x - a, y - b)$,

$$R(h, k) = \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - A_1 h - A_2 k}{|(h, k)|} \to 0$$

då $(h, k) \to (0, 0)$.

Tangentplan till funktioner av två variabler

Definition

Vi säger att $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) om det finns A_1, A_2 sådana att, om vi sätter $(h, k) = (x - a, y - b)$,

$$R(h, k) = \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - A_1 h - A_2 k}{|(h, k)|} \to 0$$

då $(h, k) \to (0, 0)$.

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A_1 h + A_2 k + R(h, k)|(h, k)|.$$

Om vi låter $k = 0$ ovan:

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A_1 + R(h,0)|h|/h.$$

$A_i = f'_{x_i}$.

Om vi låter $k = 0$ ovan:

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = A_1 + R(h,0)|h|/h.$$

$$A_1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

om f är differentierbar i (a,b).

Om vi låter $k = 0$ ovan:

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A_1 + R(h,0)|h|/h.$$

$$A_1 = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

om f är differentierbar i (a, b). D.v.s.

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = A_1.$$

Om vi låter $k = 0$ ovan:

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A_1 + R(h,0)|h|/h.$$

$$A_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

om f är differentierbar i (a,b). D.v.s.

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = A_1.$$

På samma sätt får vi

$$f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = A_2.$$

Differentierbarhet i allmänhet

Definition

Antag att $f : D_f \to \mathbb{R}$ och att $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är en inre punkt till $D_f \subset \mathbb{R}^n$.
Om det finns reella tal $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sådana att

$$R(\bar{h}) = \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - A_1 h_1 - A_2 h_2 - \ldots - A_n h_n}{|\bar{h}|} \to 0$$

då $\bar{h} \to \bar{0}$, där $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, då säger vi att f är differentierbar i $\bar{a}$.

Definition

Antag att $f : D_f \to \mathbb{R}$ och att $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är en inre punkt till $D_f \subset \mathbb{R}^n$.
Om det finns reella tal $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sådana att

$$R(\bar{h}) = \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - A_1 h_1 - A_2 h_2 - \ldots - A_n h_n}{|\bar{h}|} \to 0$$

då $\bar{h} \to \bar{0}$, där $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, då säger vi att f är differentierbar i $\bar{a}$.

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = \underbrace{f(\bar{a})}_{\text{Konst.}} + \underbrace{A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n}_{\text{Linjär del}} + \underbrace{R(\bar{h})|\bar{h}|}_{\text{Felterm}}.$$

Konstanterna A_i ges av partialderivatorna

Sats

Om f är differentierbar i $\bar{a}$ så existerar alla (första ordningens) partialderivator till f i $\bar{a}$, och konstanterna A_i i definitionen ges av

$$A_i = f'_{x_i}(\bar{a}).$$

Gradient

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right),$$

Gradient

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right),$$

Så f är differentierbar i $\bar{a}$ om och endast om

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R(\bar{h})|\bar{h}|$$

där $R(\bar{h})$ går mot 0 då $\bar{h} \to \bar{0}$.

Kontinuerliga partialderivator medför differentierbarhet

Sats

Om alla (första ordningens) partialderivator till f existerar och är kontinuerliga i någon omgivning till $\bar{a}$, då är f differentierbar i $\bar{a}$.