Högre ordnings partiella derivator. Klassen $\mathcal{C}^k$.

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Högre ordnings derivator

Dessa definieras helt enkelt som upprepade partiella derivator. T.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Notera ordningen här dock i vänster- respektive högerledet.

Dessa definieras helt enkelt som upprepade partiella derivator. T.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Notera ordningen här dock i vänster- respektive högerledet.
Om $i = j$ skriver vi istället

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Dessa definieras helt enkelt som upprepade partiella derivator. T.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Notera ordningen här dock i vänster- respektive högerledet.
Om $i = j$ skriver vi istället

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Vi kan även definiera ännu högre derivator på motsvarande sätt, som t.ex.

$$f^{(3)}_{x_2 x_1^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

Definition

Givet en öppen mängd D så betecknar $\mathcal{C}^k(D)$ mängden av alla funktioner $f : D \to \mathbb{R}$ som har kontinuerliga partialderivator upp t.o.m. ordning k på D.
(Om $k = 0$ betecknar det mängden av kontinuerliga funktioner, och $\mathcal{C}^\infty(D)$ är mängden av alla funktioner som ligger i $\mathcal{C}^k(D)$ för alla k).

Klassen $\mathcal{C}^k$

Definition

Givet en öppen mängd D så betecknar $\mathcal{C}^k(D)$ mängden av alla funktioner $f : D \to \mathbb{R}$ som har kontinuerliga partialderivator upp t.o.m. ordning k på D.
(Om $k = 0$ betecknar det mängden av kontinuerliga funktioner, och $\mathcal{C}^\infty(D)$ är mängden av alla funktioner som ligger i $\mathcal{C}^k(D)$ för alla k).

Sats

Om f är av klass $\mathcal{C}^2$ i någon omgivning till $\bar{a}$ så gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}).$$