Differentierbarhet för vektorvärda funktioner

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Definition

Antag att $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ och att $\bar{a}$ är en inre punkt till $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$.

Om det finns en $m \times n$-matris A sådan att

$$\bar{R}(\bar{h}) = \frac{\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) - A\bar{h}}{|\bar{h}|} \to \bar{0} \text{ då } \bar{h} \to \bar{0},$$

då säger vi att $\bar{f}$ är differentierbar i $\bar{a}$.

A kallas då **funktionalmatrisen** till $\bar{f}$ i $\bar{a}$ och betecknas

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\bar{a}) = A.$$

Differentierbarhet för vektorvärda funktioner

Definition

Antag att $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ och att $\bar{a}$ är en inre punkt till $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$.
Om det finns en $m \times n$-matris A sådan att

$$\bar{R}(\bar{h}) = \frac{\bar{f}(\bar{a} + \bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) - A\bar{h}}{|\bar{h}|} \to \bar{0} \text{ då } \bar{h} \to \bar{0},$$

då säger vi att $\bar{f}$ är differentierbar i $\bar{a}$.
A kallas då **funktionalmatrisen** till $\bar{f}$ i $\bar{a}$ och betecknas

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\bar{a}) = A.$$

$m = 1$-fallet: $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$.

Definition

Antag att $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ och att $\bar{a}$ är en inre punkt till $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$.
Om det finns en $m \times n$-matris A sådan att

$$\bar{R}(\bar{h}) = \frac{\bar{f}(\bar{a} + \bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) - A\bar{h}}{|\bar{h}|} \to \bar{0} \text{ då } \bar{h} \to \bar{0},$$

då säger vi att $\bar{f}$ är differentierbar i $\bar{a}$.
A kallas då **funktionalmatrisen** till $\bar{f}$ i $\bar{a}$ och betecknas

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\bar{a}) = A.$$

$m = 1$-fallet: $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$.

$$\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) = \underbrace{\bar{f}(\bar{a})}_{\text{Konst.}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}\bar{h}}_{\text{Linjär del}} + \underbrace{\bar{R}(\bar{h})|\bar{h}|}_{\text{Felterm}}.$$

Sats

Om $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D_{\bar{f}} \to \mathbb{R}^m$ *är differentierbar i* $\bar{a}$*, då existerar partialderivatorna*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\bar{a})$$

för alla $1 \le j \le m$ *och* $1 \le k \le n$*, och*

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

Bevis

För att se varför detta gäller, notera att vi har

$$f_j(\bar{a} + \bar{h}) = f_j(\bar{a}) + \nabla f_j(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R_j(\bar{h})|\bar{h}|,$$

för varje j.

För att se varför detta gäller, notera att vi har

$$f_j(\bar{a}+\bar{h}) = f_j(\bar{a}) + \nabla f_j(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R_j(\bar{h})|\bar{h}|,$$

för varje j.
Alltså får vi om vi sätter in gradienterna i raderna i en matris

$$\begin{pmatrix} f_1(\bar{a}+\bar{h}) \\ f_2(\bar{a}+\bar{h}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a}+\bar{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{a}) \\ f_2(\bar{a}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & \nabla f_1(\bar{a}) & - \\ - & \nabla f_2(\bar{a}) & - \\ \vdots & & \\ - & \nabla f_m(\bar{a}) & - \end{pmatrix} \bar{h} + \begin{pmatrix} R_1(\bar{h}) \\ R_2(\bar{h}) \\ \vdots \\ R_m(\bar{h}) \end{pmatrix} |\bar{h}|.$$

Specialfall

Om vi har funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ så gäller

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Specialfall

Om vi har funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ så gäller

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Om vi har funktioner $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ och $w(x, y, z)$ så gäller

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$