Kedjeregeln. PDE

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Kedjeregeln, specialfall

$f(u, v)$ där $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$.

Kedjeregeln, specialfall

$f(u, v)$ där $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y))$$

Kedjeregeln, specialfall

$f(u, v)$ där $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Kedjeregeln, specialfall

$f(u,v)$ där $u = u(x,y)$ och $v = v(x,y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kedjeregeln, specialfall

$f(u, v)$ där $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x.$$

Kedjeregeln, Specialfall

$f(u, v) = g(u) + h(v)$ och $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$.

Kedjeregeln, Specialfall

$f(u, v) = g(u) + h(v)$ och $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$.

$$f(u, v) = f(\alpha(x), \beta(x)) = g(\alpha(x)) + h(\beta(x)).$$

Kedjeregeln, Specialfall

$f(u,v) = g(u) + h(v)$ och $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$.

$$f(u,v) = f(\alpha(x), \beta(x)) = g(\alpha(x)) + h(\beta(x)).$$

$$\frac{d}{dx} f(\alpha(x)), \beta(x)) = g'(\alpha(x))\alpha'(x) + h'(\beta(x))\beta'(x).$$

Kedjeregeln, Specialfall

$f(u, v) = g(u) + h(v)$ och $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$.

$$f(u, v) = f(\alpha(x), \beta(x)) = g(\alpha(x)) + h(\beta(x)).$$

$$\frac{d}{dx} f(\alpha(x)), \beta(x)) = g'(\alpha(x))\alpha'(x) + h'(\beta(x))\beta'(x).$$

Notera nu att g' är precis partialderivatan av f med avseende på u och h' är partialderivatan av f med avseende på v.

$f(u, v) = g(u) + h(v)$ och $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$.

$$f(u, v) = f(\alpha(x), \beta(x)) = g(\alpha(x)) + h(\beta(x)).$$

$$\frac{d}{dx} f(\alpha(x)), \beta(x)) = g'(\alpha(x))\alpha'(x) + h'(\beta(x))\beta'(x).$$

Notera nu att g' är precis partialderivatan av f med avseende på u och h' är partialderivatan av f med avseende på v.

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(\alpha(x)), \beta(x)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

Kedjeregeln

Sats (Kedjeregeln)

Om den reellvärda funktionen f beror på m variabler $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ som i sin tur beror på n variabler $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ då gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_r} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_r}. \tag{1}$$

Specialfall

(a) $m = 2, n = 1$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$ ger

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

(a) $m = 2, n = 1$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$ ger

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

(b) $m = n = 2$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ ger

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Specialfall

(a) $m = 2, n = 1$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$ ger

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

(b) $m = n = 2$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ ger

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

(c) $m = n = 3$: $f(u, v, w)$ där $\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$ ger t.ex.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer

Vi kommer använda kedjeregeln till att göra variabelbyten i vissa partiella differentialekvationer.

Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer

Vi kommer använda kedjeregeln till att göra variabelbyten i vissa partiella differentialekvationer.
Antag att vi vill lösa

$$2xz'_x - yz'_y = y^2.$$

Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer

Vi kommer använda kedjeregeln till att göra variabelbyten i vissa partiella differentialekvationer.

Antag att vi vill lösa

$$2xz'_x - yz'_y = y^2.$$

Genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x \end{cases}$$

kan man via kedjeregeln visa att

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\frac{\partial z}{\partial v} = y^2,$$

vilket ger

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y^2}{2x} = \frac{u}{2v^2}.$$

Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer

Vi kommer använda kedjeregeln till att göra variabelbyten i vissa partiella differentialekvationer.
Antag att vi vill lösa

$$2xz'_x - yz'_y = y^2.$$

Genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x \end{cases}$$

kan man via kedjeregeln visa att

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\frac{\partial z}{\partial v} = y^2,$$

vilket ger

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y^2}{2x} = \frac{u}{2v^2}.$$

Detta medför att $z = -\frac{u}{2v} + h(u) = -\frac{y^2}{2} + h(xy^2)$.