Taylors formel. Lokala extrempunkter

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal.

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal.
Graden av $x^k y^l$ är $k + l$, och graden av ett polynom definieras som den högsta graden av dess termer.

Polynom i flera variabler

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal.
Graden av $x^k y^l$ är $k + l$, och graden av ett polynom definieras som den högsta graden av dess termer.
Så t.ex. är

$$p(x, y) = 3x^3 + 4x^2y^4 + y^2$$

ett polynom av grad 6 (mittentermen har högsta grad $2 + 4$).

Polynom i flera variabler

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal.
Graden av $x^k y^l$ är $k + l$, och graden av ett polynom definieras som den högsta graden av dess termer.
Så t.ex. är

$$p(x, y) = 3x^3 + 4x^2y^4 + y^2$$

ett polynom av grad 6 (mittentermen har högsta grad $2 + 4$).
Polynom av flera variabler definieras på ett analogt sätt, så t.ex. är

$$p(x, y, z) = 3x^2z - 4yz^3 + 7xy^3z^4$$

ett polynom av grad $1 + 3 + 4 = 8$ i tre variabler.

Givet en reellvärd funktion f av n variabler så definierar vi det k**:e Taylorpolynomet** till f i en punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ som det unika polynom p_k av grad högst k och sådant att p_k och alla dess partialderivator upp till och med ordning k är lika med motsvarande för funktionen f i punkten $\bar{a}$.

Givet en reellvärd funktion f av n variabler så definierar vi det k:e **Taylorpolynomet** till f i en punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ som det unika polynom p_k av grad högst k och sådant att p_k och alla dess partialderivator upp till och med ordning k är lika med motsvarande för funktionen f i punkten $\bar{a}$.

Sats (Taylor)

Om f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till $\bar{a}$ upp till och med grad $k+1$ så gäller

$$(*) \quad f(\bar{x}) = p_k(\bar{x}) + b(\bar{x})|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1},$$

där p_k är det k:e Taylorpolynomet till f i $\bar{a}$ och $b(\bar{x})$ är begränsad i någon omgivning till $\bar{a}$.
Vidare är p_k det enda polynomet av grad $\leq k$ som uppfyller $(*)$.

Taylors formel i två variabler

$$p_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2$$

Taylors formel i två variabler

$$
\begin{aligned}
&p_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 = \\
&f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b) + \\
&\frac{1}{2}(x-a \quad y-b) H(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

är andra ordningens Taylorpolynom till f i (a,b), där

Taylors formel i två variabler

$$
\begin{aligned}
&p_2(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 = \\
&f(a,b) + \nabla f(a,b) \bullet (x-a, y-b) + \\
&\frac{1}{2}(x-a \quad y-b) H(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

är andra ordningens Taylorpolynom till f i (a,b), där

$$
H(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}.
$$

Om vi nu har en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av n variabler, och vi låter $H(\bar{a})$ vara matrisen som på plats ij har andraderivatan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

då vet vi att denna matris är symmetrisk, eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi tar partialderivatorna (om vi antar att f är av klass $\mathcal{C}^2$ nära punkten $\bar{a}$).

Flera variabler

Om vi nu har en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av n variabler, och vi låter $H(\bar{a})$ vara matrisen som på plats ij har andraderivatan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

då vet vi att denna matris är symmetrisk, eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi tar partialderivatorna (om vi antar att f är av klass $\mathcal{C}^2$ nära punkten $\bar{a}$).

$$p_2(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^t H(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a}).$$

Om vi nu har en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av n variabler, och vi låter $H(\bar{a})$ vara matrisen som på plats ij har andraderivatan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

då vet vi att denna matris är symmetrisk, eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi tar partialderivatorna (om vi antar att f är av klass $\mathcal{C}^2$ nära punkten $\bar{a}$).

$$p_2(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^t H(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a}).$$

Observera dock att i uttycket $\nabla f(\bar{a}) \bullet (\bar{x} - \bar{a})$ ska $\bar{x} - \bar{a}$ behandlas som en vektor i $\mathbb{R}^n$, medan det i matrismultiplikationen $(\bar{x} - \bar{a})^t H(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a})$ ska behandlas som en kolumnmatris.

Lokala extrempunkter

Definition

Om f är en reellvärd funktion av n variabler och $\bar{a}$ uppfyller att det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon)$$

så kallas $\bar{a}$ ett **lokalt maximum** till f.
Om det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) < f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon) \setminus \{\bar{a}\}$$

så kallas $\bar{a}$ ett **lokalt strängt maximum** till f. Med omvända olikheter definieras lokala (stränga) minimum också.

Lokal extrempunkt medför gradient noll

Sats

Om $\bar{a}$ är ett lokalt max/min till f och f är differentierbar i $\bar{a}$, då gäller att $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

Lokal extrempunkt medför gradient noll

Sats

Om $\bar{a}$ är ett lokalt max/min till f och f är differentierbar i $\bar{a}$, då gäller att $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

Punkter $\bar{x}$ där $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ kallas **kritiska eller stationära punkter** till f.

Andraderivatatest

Om $\bar{a}$ är en kritisk punkt och f är av klass $\mathcal{C}^3$ nära $\bar{a}$ så får vi från Taylors sats att

$$f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}\bar{h}^t H(\bar{a})\bar{h} + b(\bar{x})|\bar{h}|^3 = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + b(\bar{x})|\bar{h}|^3.$$

Q är här den kvadratiska form som har Hessianen som matris.

Andraderivatatest

Om $\bar{a}$ är en kritisk punkt och f är av klass $\mathcal{C}^3$ nära $\bar{a}$ så får vi från Taylors sats att

$$f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}\bar{h}^t H(\bar{a})\bar{h} + b(\bar{x})|\bar{h}|^3 = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + b(\bar{x})|\bar{h}|^3.$$

Q är här den kvadratiska form som har Hessianen som matris.

Sats

Om $\bar{a}$ är en kritisk punkt till f, så gäller följande:

- *Om Q är positivt definit har f ett lokalt strängt minimum i $\bar{a}$,*
- *Om Q är negativt definit har f ett lokalt strängt maximum i $\bar{a}$,*
- *Om Q är indefinit har f en sadelpunkt i $\bar{a}$.*

I de fall där Q bara är (postitivt eller negativt) semidefinit räcker inte andraderivatorna till för att avgöra om f har en lokal extrempunkt eller ej.