Kurvor. Ytor. Funktionaldeterminanter. Inversa funktioner

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Kurvor

Om $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i $\mathbb{R}^n$.

Om $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i $\mathbb{R}^n$.
Vi antar nu fortsättningsvis även att $\bar{r}(t)$ är deriverbar för varje $t \in]a, b[$.

Kurvor

Om $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i $\mathbb{R}^n$.
Vi antar nu fortsättningsvis även att $\bar{r}(t)$ är deriverbar för varje $t \in]a, b[$.

$$\bar{r}'(t) = (r_1'(t), r_2'(t), \ldots, r_n'(t))$$

kallas (förutom derivatan) för **hastigheten** i punkten t, och $|\bar{r}'(t)|$ kallas **farten** i t.

Kurvor

Om $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i $\mathbb{R}^n$.
Vi antar nu fortsättningsvis även att $\bar{r}(t)$ är deriverbar för varje $t \in]a, b[$.

$$\bar{r}'(t) = (r_1'(t), r_2'(t), \ldots, r_n'(t))$$

kallas (förutom derivatan) för **hastigheten** i punkten t, och $|\bar{r}'(t)|$ kallas **farten** i t.
Vi noterar också att vektorn $\bar{r}'(t)$ är en tangent till kurvan i punkten $\bar{r}(t)$.

Plan på parameterform

Ett plan i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på parameterform som

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + u(b_1, b_2, b_3) + v(c_1, c_2, c_3),$$

där u, v är reella parametrar, (a_1, a_2, a_3) är någon punkt på planet och $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ är vektorer som är parallella med planet.

Plan på parameterform

Ett plan i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på parameterform som

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + u(b_1, b_2, b_3) + v(c_1, c_2, c_3),$$

där u, v är reella parametrar, (a_1, a_2, a_3) är någon punkt på planet och $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ är vektorer som är parallella med planet. Om vi inför beteckningen

$$\bar{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) = (a_1+ub_1+vc_1, a_2+ub_2+vc_2, a_3+u$$

betyder detta alltså att planet helt enkelt är $V_{\bar{f}}$.

Ytor på parameterform

Givet $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^3$ där $U \subset \mathbb{R}^2$, så kommer $V_{\bar{f}}$ typiskt också vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av funktionen.

Ytor på parameterform

Givet $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^3$ där $U \subset \mathbb{R}^2$, så kommer $V_{\bar{f}}$ typiskt också vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av funktionen.
D.v.s U avbildas på ytan $V_{\bar{f}}$.

Givet $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^3$ där $U \subset \mathbb{R}^2$, så kommer $V_{\bar{f}}$ typiskt också vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av funktionen.
D.v.s U avbildas på ytan $V_{\bar{f}}$.
Eftersom

$$\bar{f}(u,v) = (f_1, f_2, f_3)(u,v) \approx \bar{f}(a,b) + d\bar{f}(a,b)(u-a, v-b)$$

så ser vi att tangentplanet till ytan i $\bar{f}(a,b)$ ges på parameterform av (med $h = u - a,\ k = v - b$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \\ f_3(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Funktionaldeterminanter

Definition

Om $\bar{f} : M \to N$, där $M, N \subset \mathbb{R}^n$, är differentierbar i $\bar{a}$, då definierar vi funktionaldeterminanten till $\bar{f}$ i $\bar{a}$:

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}(\bar{a}) = \det \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}).$$

Inversa funktionssatsen

Sats (Inversa funktionssatsen)

Låt $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vara en funktion av n variabler $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av klass $\mathcal{C}^k$ i en omgivning till $\bar{a}$. Då finns öppna omgivningar U, V till $\bar{a}$ respektive $\bar{f}(\bar{a})$ sådana att $\bar{f} : U \to V$ är bijektiv, och en invers funktion $\bar{f}^{-1} : V \to U$ av klass $\mathcal{C}^k$ om och endast om

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}(\bar{a}) \neq 0.$$

Vidare har vi i detta fallet att

$$\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial \bar{y}}(\bar{f}(\bar{a})) = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\right)^{-1}.$$