Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-08-17

1. (a) Sätt $u = xy$, $v = y$. Kedjeregeln ger $z'_x = y\, z'_u$ och $z'_y = x\, z'_u + z'_v$, så den givna PDE:n $y\, z'_y - x\, z'_x = 2xy^3$ är ekvivalent med

$$v\, z'_v = 2uv^2 \qquad (u > 0,\, v > 0).$$

Alltså: $z'_v = 2uv$, så att $z = uv^2 + g(u) = xy^3 + g(xy)$.

Svar: $z(x,y) = xy^3 + g(xy)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

(b) Insättning av $y = 1$ i lösningen från (a) ger $x^2 = z(x,1) = x + g(x)$, dvs. $g(x) = x^2 - x$.

Svar: $z(x,y) = xy^3 + (xy)^2 - xy$.

(c) Insättning av $y = x$ istället ger $x^2 = z(x,x) = x^4 + g(x^2)$, dvs. $g(t) = t - t^2$ (för $t \geq 0$).

Svar: $z(x,y) = xy^3 + xy - (xy)^2$.

2. Med variabelbytet $u = 3y - x$, $v = 2 + y - x$ fås en ny triangel E med hörn i $(u,v) = (0,2)$, $(0,0)$ och $(4,2)$. (Observera att u och v är ickenegativa i E, så att vi kan använda regeln $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ nedan.) Från $\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |2| = 2$ fås $dudv = 2\,dxdy$, och alltså

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{(3y-x)(2+y-x)}\, dxdy \\
&= \iint_E \sqrt{uv}\, \frac{dudv}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{v=0}^{2} \sqrt{v}\left(\int_{u=0}^{2v} \sqrt{u}\, du\right) dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{v=0}^{2} \sqrt{v} \cdot \frac{2}{3}(2v)^{3/2}\, dv \\
&= \frac{2^{3/2}}{3}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^{3/2+3}}{9} = \frac{16\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

3. Notera att svaret måste bli negativt, eftersom integranden xyz är negativ i (det inre av) integrationsområdet D.

   I rymdpolära koordinater fås ett nytt område E med gränser $0 \le r \le \sqrt{2}$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$ och $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$, alltså

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\,dxdydz &= \iiint_E r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\sin\varphi\sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right) \\ &= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{8-0}{6}\cdot\frac{0-1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

   Det går också bra att räkna direkt i de ursprungliga koordinaterna, om man så föredrar:

$$\iiint_D xyz\,dxdydz = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{\sqrt{2-x^2}}\left(\int_{z=-\sqrt{2-x^2-y^2}}^{0} xyz\,dz\right)dy\right)dx = -\frac{1}{12}.$$

   Svar: $-1/12$.

4. Låt $f(x,y,z) = x - y\ln z$ (för $z > 0$), så att ytans ekvation är $f(x,y,z) = k$. I den sökta tangeringspunkten (a,b,c) ska ytans normalvektor $\nabla f(a,b,c)$ vara parallell med normalvektorn till planet $2x-2y+z=0$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\ln c \\ -b/c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   för någon konstant λ. Jämförelse av x-koordinaterna ger direkt $\lambda = 1/2$, och då blir $\ln c = 1$ och $b/c = -1/2$, alltså $c = e$ och $b = -e/2$. Punkten (a,b,c) ska ligga i planet $2x-2y+z=0$, vilket ger $a = \frac{1}{2}(2b-c) = -e$, och det sökta k-värdet fås slutligen ur

$$k = f(a,b,c) = f(-e,-e/2,e) = -e - (-e/2)\cdot 1 = -e/2.$$

   Svar: $k = -e/2$.

5. (a) För $t \neq 0$ är $f(t,t) = \frac{(2t)^2+t^3-t^3}{2t^2} = 2$, vilket inte går mot $f(0,0) = 1$ då $t \to 0$.

   Svar: f är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

   (b) Vi har

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2+h^3}{h^2} - 1\right) = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

   (Kan även ses såhär: $f(x,0) = x+1$ för alla $x \in \mathbf{R}$, inklusive $x = 0$, så $f'_x(x,0) = \frac{d}{dx}(x+1) = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$, inklusive $x = 0$.)
   På liknande sätt fås $f'_y(0,0) = -1$.

   Svar: $f'_x(0,0) = 1$ och $f'_y(0,0) = -1$.

   (c) Riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$ är $g'(0)$, där $g(t) = f(t\mathbf{v})$. Men vi såg ju i (a) att funktionen

$$g(t) = f(t\mathbf{v}) = f(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}) = \begin{cases} 2, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

   inte är kontinuerlig i $t = 0$, och alltså än mindre deriverbar där.

   Svar: Derivatan $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$ i riktningen $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ existerar inte.

6. Svaret är **ja** i alla tre fallen. Exempel:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^4$ har strängt lokalt (och t.o.m. globalt) minimum i origo, eftersom $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) > 0$ (uppenbart) för alla $(x,y) \neq (0,0)$. Den kvadratiska formen i Maclaurinutvecklingen är i detta fall $Q(h,k) = h^2$, prototypen för en positivt semidefinit kvadratisk form.

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^4$ har varken lokalt maximum eller lokalt minumum i origo, eftersom $f(0,0) = 0$ och varje omgivning av origo innehåller både punkter där f är negativ och där f är positiv: $f(x,0) = x^2 > 0$ om $x \neq 0$, och $f(0,y) = -y^4 < 0$ om $y \neq 0$. Även här är $Q(h,k) = h^2$.

   (c) $f(x,y) = -x^4 - y^4$ har strängt lokalt (och t.o.m. globalt) maximum i origo. I detta fall är $Q(h,k) = 0$, vilket faktiskt är en positivt semidefinit form, eftersom den uppfyller de villkor som krävs: $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k), och det finns $(h,k) \neq (0,0)$ där $Q(h,k) = 0$. (Denna form är även negativt semidefinit; det är den enda kvadratiska formen som tillhör två olika kategorier.)