Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-10-20

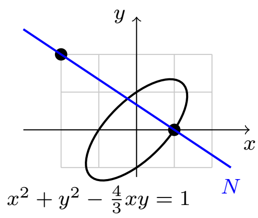
1. Derivatorna $f'_x = 6x + 4y + 2x^2$ och $f'_y = 2y + 4x$ är noll om och endast om $(x, y) = (0, 0)$ eller $(x, y) = (1, -2)$. Andraderivatorna $f''_{xx} = 6 + 4x$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2$ uträknade i dessa punkter ger de kvadratiska formerna
$$Q_{(0,0)}(h, k) = 6h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 - 2h^2$$
och
$$Q_{(1,-2)}(h, k) = 10h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k + 2h)^2 + 2h^2.$$
Den första är indefinit, t.ex. är $Q_{(0,0)}(1, -2) < 0 < Q_{(0,0)}(0, 1)$, så $(0, 0)$ är en sadelpunkt. Den andra är positivt definit, eftersom den är uppenbart ickenegativ, och lika med noll bara då $k + 2h = h = 0$, dvs. då $h = k = 0$; alltså har f (strängt) lokalt minimum i $(1, -2)$.

   Svar: $(1, -2)$ är en lokal minimipunkt.

2. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat, men integranden $xy/(1 + (x^2 + y^2)^4)$ är positiv i D, vilket motiverar att vi kan räkna på som vanligt. Byte till polära koordinater ger
$$\iint_D \frac{xy}{1 + (x^2 + y^2)^4}\, dxdy = \int_{\rho=0}^{\infty} \left(\int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{1 + \rho^8}\, \rho\, d\varphi \right) d\rho$$
$$= \lim_{\omega\to\infty} \left[\tfrac{1}{4} \arctan(\rho^4) \right]_0^{\omega} \left[\tfrac{1}{2} \sin^2\varphi \right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \Big(1^2 - (1/2)^2 \Big) = \frac{3\pi}{64}.$$

   Svar: $3\pi/64$.

3. Sätt $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$, så att kurvan är $f(x, y) = 1$. Gradienten
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + ky \\ 2y + kx \end{pmatrix}$$
är vinkelrät mot f:s nivåkurvor, så normallinjen N i punkten $(1, 0)$ har riktningsvektor
$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}.$$
Linjen N går genom $(-2, 2)$ om och endast om denna riktningsvektor är parallell med vektorn från $(1, 0)$ till $(-2, 2)$:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff k = -\frac{4}{3}.$$

   Svar: $k = -4/3$.

4. Funktionen $F(x,y,z) = 2yz + e^{xz} + \cos(xy)$ är uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$, och $F(0,-1,3) = -6+1+1 = -4$. Vidare är

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\,e^{xz} - y\,\sin(xy) \\ 2z - x\,\sin(xy) \\ 2y + x\,e^{xz} \end{pmatrix}, \qquad \nabla F(0,-1,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

alltså i synnerhet $F'_y(0,-1,3) = 6 \neq 0$. Förutsättningarna för implicita funktionssatsen är därmed uppfyllda, vilket visar att sambandet $F(x,y,z) = -4$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x,z)$ nära $(0,-1,3)$.

Per definition är $f(0,3) = -1$. Derivatorna fås med implicit derivering:

$$\begin{aligned} f'_x(0,3) &= -\frac{F'_x(0,-1,3)}{F'_y(0,-1,3)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \\ f'_z(0,3) &= -\frac{F'_z(0,-1,3)}{F'_y(0,-1,3)} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

5. Med det föreslagna variabelbytet fås från kedjeregeln att $f'_x = f'_v + z\,f'_w$, $f'_y = f'_u + f'_v$ och $f'_z = x\,f'_w$. Insättning i PDE:n ger

$$0 = x\,(f'_x - f'_y) - z\,f'_z = x\,(z\,f'_w - f'_u) - z\,x\,f'_w = -x\,f'_u,$$

alltså $f'_u = 0$ (eftersom vi förutsätter $x > 0$). Därmed är $f(u,v,w) = g(v,w)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler. I de ursprungliga variablerna fås alltså

$$f(x,y,z) = g(x+y, xz).$$

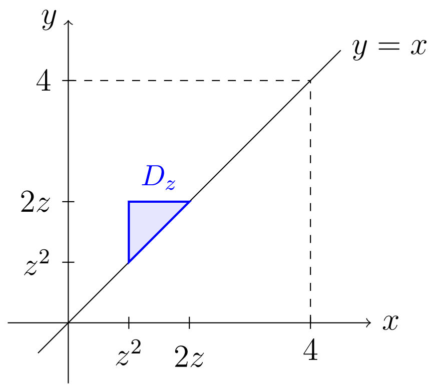
Bivillkoret ger $yz = f(1,y,z) = g(1+y,z)$, så att $g(s,t) = (s-1)t$, och följaktligen $f(x,y,z) = (x+y-1)xz$.

Svar: $f(x,y,z) = (x+y-1)xz$.

(Ett litet tips: Det är lätt att kontrollera genom insättning att svaret uppfyller både PDE:n och bivillkoret!)

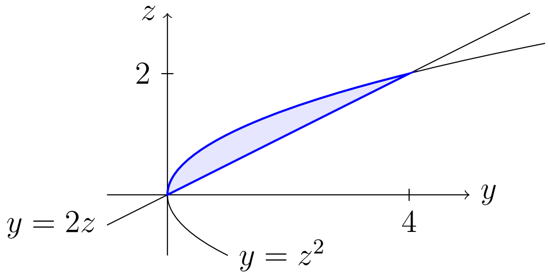
6. Ett enkelt sätt är skivor för fixt z: om man håller z konstant i olikheterna $z^2 \le x \le y \le 2z$ så ser man att tvärsnittet D_z är en halv kvadrat med sidlängd $2z - z^2$ (förutsatt att $z^2 \le 2z$, dvs. $0 \le z \le 2$), så

$$\iiint_D z\,dxdydz = \int_{z=0}^{2} \left(\iint_{D_z} z\,dxdy \right) dz = \int_{z=0}^{2} z \text{ area}(D_z)\,dz$$
$$= \int_{z=0}^{2} z \cdot \tfrac{1}{2}(2z - z^2)^2\,dz = \frac{8}{15}.$$



Men det går på flera andra sätt också, t.ex. stavar i x-led: olikheterna för D ger direkt gränserna $z^2 \le x \le y$ för den inre x-integralen, och kroppens projektion $\widetilde{D}$ på yz-planet ges av $z^2 \le y \le 2z$, dvs. området mellan kurvan $y = z^2$ och linjen $y = 2z$. Alltså

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{x=z^2}^{y} z\,dx \right) dydz = \iint_{\widetilde{D}} z(y - z^2)\,dydz$$
$$= \int_{z=0}^{2} \left(\int_{y=z^2}^{2z} z(y - z^2)\,dy \right) dz = \frac{8}{15}.$$



Svar: 8/15.