Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-01-04

1. Stationära punkter fås ur ekvationerna $f'_x = 2x + 8y - 3x^2 = 0$ och $f'_y = 8y + 8x = 0$, med lösningarna $(x, y) = (0, 0)$ eller $(x, y) = (-2, 2)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 2 - 6x$, $f''_{xy} = 8$ och $f''_{yy} = 8$, vilket ger de kvadratiska formerna

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 2h^2 + 16hk + 8k^2 = 8(k + h)^2 - 6h^2$$

(indefinit, alltså är $(0, 0)$ en sadelpunkt) och

$$Q_{(-2,2)}(h, k) = 14h^2 + 16hk + 8k^2 = 8(k + h)^2 + 6h^2$$

(positivt definit, alltså är $(-2, 2)$ en lokal minimipunkt).

Svar: Funktionen har lokalt minimum i punkten $(-2, 2)$.

2. Från den första ekvationen $f'_x = 2xy^2e^y + yze^z$ fås $f(x, y, z) = x^2y^2e^y + xyze^z + g(y, z)$ för någon ännu okänd funktion $g(y, z)$. Insättning av detta i den andra ekvationen $f'_y = yx^2(y+2)e^y + (xz+1)e^z + 3$ ger $g'_y = e^z + 3$, dvs. $g(y, z) = y(e^z + 3) + h(z)$ för någon funktion $h(z)$. Insättning av det vi nu vet om f i den sista ekvationen $f'_z = y(xz + x + 1)e^z + 2z$ ger $h' = 2z$, alltså $h(z) = z^2 + C$ för någon konstant C. Alltså $f(x, y, z) = x^2y^2e^y + xyze^z + y(e^z + 3) + z^2 + C$, och villkoret $f(0, 1, 0) = 2$ ger $C = -2$.

Svar: $f(x, y, z) = x^2y^2e^y + xyze^z + y(e^z + 3) + z^2 - 2$.

3. Variabelbytet $u = 3y - x$, $v = 2x - y$ ger direkt ett nytt område E med gränserna $2 \le u \le 6$ och $2 \le v \le 4$. Funktionaldeterminanten $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ ger $dudv = |-5|\,dxdy = 5\,dxdy$. Alltså

$$\iint_D \frac{x + 2y}{3y - x}\,dxdy = \iint_E \frac{u + v}{u}\,\frac{dudv}{5} = \frac{1}{5}\int_{u=2}^{6}\left(\int_{v=2}^{4}\left(1 + \frac{v}{u}\right)dv\right)du$$
$$= \frac{1}{5}\int_{u=2}^{6}\left(2 + \frac{6}{u}\right)du = \frac{1}{5}(8 + 6\ln(6/2)).$$

Svar: $\frac{2}{5}(4 + 3\ln 3)$.

4. Vi söker en punkt $P = (x(t), y(t))$ på kurvan sådan att vektorn från P till $(-2, -4)$ är parallell med kurvans tangentvektor i P, alltså $\binom{x'(t)}{y'(t)}$. Detta ger

$$\begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t^2 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2t \\ 2t - 1 \end{pmatrix},$$

vilket är uppfyllt då

$$0 = \begin{vmatrix} t^2 + 3 & 2t \\ t^2 - t + 4 & 2t - 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t + 1)(t - 3).$$

Insättning av värdena $t = -1$ och $t = 3$ ger punkterna $(x, y) = (2, 2)$ respektive $(10, 6)$, och att räkna ut ekvationerna för de linjer som förbinder dessa punkter med $(-2, -4)$ är en rutinsak.

Svar: $3x - 2y = 2$ och $5x - 6y = 14$.

5. V:s volym är

$$\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=(x^2+y^2)^{1/4}}^{(4-3x^2-3y^2)^{1/2}} dz \right) dxdy$$

där E är det område i $\mathbf{R}^2$ där olikheten

$$(x^2 + y^2)^{1/4} \leq (4 - 3x^2 - 3y^2)^{1/2}$$

gäller. I polära koordinater (ρ, φ) fås $\sqrt{\rho} \leq \sqrt{4 - 3\rho^2}$, alltså $0 \leq \rho \leq 1$, så E är helt enkelt enhetscirkelskivan. Integralen ovan blir alltså

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4 - 3\rho^2} - \sqrt{\rho} \right) \rho \, d\rho &= 2\pi \left[-\tfrac{1}{9}(4 - 3\rho^2)^{3/2} - \tfrac{2}{5}\rho^{5/2} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{4^{3/2} - 1}{9} - \frac{2}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Svar: $34\pi/45$.

6. Kurvan i uv-planet ges av

$$u(t) = x(t) + y(t)^3, \qquad v(t) = x(t)^3 y(t)^2,$$

så med kedjeregeln fås

$$u'(t) = x'(t) + 3y(t)^2 y'(t), \quad v'(t) = 3x(t)^2 x'(t) \cdot y(t)^2 + x(t)^3 \cdot 2y(t)y'(t).$$

Insättning av $t = 0$ och de givna värdena $x(0) = 2$ och $y(0) = 1$ ger

$$u'(0) = x'(0) + 3y'(0), \quad v'(0) = 12x'(0) + 16y'(0),$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

(Anmärkning: Matrisen här är helt enkelt avbildningens funktionalmatris i punkten $(x, y) = (2, 1)$.) För att få $u'(0) = 1$ och $v'(0) = 0$ måste vi ta

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $x'(0) = -4/5$ och $y'(0) = 3/5$.