Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-05-31

1. Upprepad enkelintegration ger direkt

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{x=-2}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{2-x} xy\,dy\right)dx = \int_{x=-2}^{1} x\left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2}\right)dx.$$

Svar: $-45/8$.

2. Med det föreslagna variabelbytet fås enligt kedjeregeln $z'_x = e^y z'_u + z'_v$ och $z'_y = xe^y z'_u$, vilket insatt i ekvationen ger $xz'_v = 2x^2$, dvs. $z'_v = 2v$ (för $v > 0$). Integration ger $z(u,v) = v^2 + g(u)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion, alltså $z(x,y) = x^2 + g(xe^y)$. Bivillkoret $z(1,y) = e^{-y}$ ger nu $1 + g(e^y) = e^{-y}$, dvs. $g(t) = \frac{1}{t} - 1$ (för $t > 0$).

Svar: $z(x,y) = x^2 + \dfrac{1}{xe^y} - 1$.

3. Stationära punkter fås genom att sätta gradienten lika med nollvektorn:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4+4x+2z+2xy^2 \\ 2y+2x^2y \\ 2z+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mittenekvationen $2(1+x^2)y = 0$ ger genast $y = 0$, och då återstår ett linjärt ekvationssystem för x och z. Man finner att den enda stationära punkten är $(x,y,z) = (-2,0,2)$. Från andraderivatorna i denna punkt erhålls på vanligt sätt den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 4h^2 + 10k^2 + 2l^2 + 4hl = 2(l+h)^2 + 2h^2 + 10k^2,$$

som är positivt definit (enligt det vanliga resonemanget).

Svar: f har lokalt minimum i punkten $(-2,0,2)$. (Lokalt maximum saknas.)

4. Sätt $f(x,y) = x + y^2 + x^3 + k$, så att ytan är $z = f(x,y)$. Ekvationen för tangentplanet ifråga är

$$\begin{aligned} z &= f(1,-1) + f'_x(1,-1)\,(x-1) + f'_y(1,-1)\,(y-(-1)) \\ &= 3 + k + 4(x-1) - 2(y+1) \\ &= k - 3 + 4x - 2y, \end{aligned}$$

vilket satisfieras av punkten $(x,y,z) = (2,3,4)$ om och endast om

$$4 = k - 3 + 4\cdot 2 - 2\cdot 3 \quad\Longleftrightarrow\quad k = 5.$$

Svar: $k = 5$.

5. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat, men integranden är positiv så vi kan räkna på som vanligt, och t.ex. byta till rymdpolära koordinater:

$$\iiint_D \frac{1+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$$
$$= \int_{r=2}^{\infty} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1+r^2\cos^2\theta}{(r^2)^3}\, r^2 \sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$$
$$= 2\pi \int_{r=2}^{\infty} \left[\frac{-\cos\theta - r^2 \cdot \frac{1}{3}\cos^3\theta}{r^4} \right]_0^{\pi/2} dr$$
$$= 2\pi \int_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{3r^2} \right) dr = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{3r^3} - \frac{1}{3r} \right]_{r=2}^{R} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right).$$

Svar: $5\pi/12$.

6. Sätt $F(x,y,z) = 3x + 4y^2 + z^2$ och $G(x,y,z) = 4x + 6y + 4z + e^{xyz}$. Då är F och G av klass $\mathcal{C}^1$, och den givna punkten uppfyller ekvationerna: $F(0,2,1) = 17$, $G(0,2,1) = 17$. Det återstående villkoret som krävs för att implicita funktionssatsen ska visa att ekvationssystemet lokalt definierar x och y som $\mathcal{C}^1$-funktioner av z är att determinanten $\frac{d(F.G)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}$ är skild från noll i punkten $(0,2,1)$. Detta är samma sak som att z-komponenten är skild från noll i kryssprodukten

$$\nabla F(0,2,1) \times \nabla G(0,2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 0 \\ -78 \end{pmatrix},$$

vilket uppenbarligen är sant. Svaret i (a) är alltså att det går. Implicit derivering av $F(x(z),y(z),z) = 17$ och $G(x(z),y(z),z) = 17$ ger (efter insättning av $z=1$, $x(1)=0$, $y(1)=2$) ett 2×2-ekvationssystem för derivatorna $x'(1)$ och $y'(1)$; de kan också fås direkt såhär[1]:

$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{-78} \begin{pmatrix} 52 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vad gäller (b) så är y-komponenten i kryssprodukten noll, så i det fallet säger inte implicita funktionssatsen någonting. Däremot går även (c) bra, eftersom x-komponenten är nollskild, och derivatorna av $y(x)$ och $z(x)$ då $x=0$ blir

$$\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 0 \\ -78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

[1]Kurvan $(x(z),y(z),z)$ beskriver skärningen mellan ytorna $F=17$ och $G=17$, och har tangentvektorn $(x'(z),y'(z),1)$. Kryssprodukten är också tangentvektor till skärningskurvan. Alltså måste $(x'(1),y'(1),1)$ vara parallell med $(52,0,-78)$.