EXEMPELSAMLING FÖR TATA72 OCH TATA73

Margarita Nikoltjeva-Hedberg

ANALYS I EN VARIABEL

1.1 Bestäm supremum och infimum av följande mängder:

a) $M = \{1/n : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$, b) $M = \left\{x \in \mathbb{R} : -\dfrac{3}{2} < \dfrac{2x+2}{|x+1|+1} < \dfrac{3}{2}\right\}$.

1.2 Definiera vad som menas med att $f(x) \to A$ då $x \to -\infty$. Rita en figur.

1.3 Definiera vad som menas med att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$. Rita en figur.

1.4 Visa med hjälp av definitionen av gränsvärde att

a) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 1$, b) $\dfrac{x^2-1}{x-1} \to 2$ då $x \to 1$,

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} \to \dfrac{1}{4}$ då $x \to 2$, d) $\dfrac{3x-1}{2x+4} \to \dfrac{3}{2}$ då $x \to \infty$,

e) $\dfrac{1}{x} \to 0$ då $x \to -\infty$.

1.5 Låt $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, där $a_0, b_0 > 0$. Visa att då $x \to \infty$ gäller att $R(x) \to \infty$ om $n > m$, $R(x) \to a_0/b_0$ om $n = m$, och $R(x) \to 0$ om $n < m$.

1.6 Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, där $m, n \in \mathbb{Z}_+$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x-1}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right) + \left(x+\frac{2a}{n}\right) + \ldots + \left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(x+\frac{2a}{n}\right)^2 + \ldots + \left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right)$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cot 3x$.

1.7 I vilka punkter x är funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ kontinuerlig?

1.8 Låt $f(x) = \left[x^2\right]$ vara heltalsdelen av x^2 för alla $x \in \mathbb{R}$. Var är f

a) kontinuerlig, b) högerkontinuerlig, c) vänsterkontinuerlig?

1.9 Låt $f(x) = 1/(x^2-4) - a/(x-2)$, $x \neq \pm 2$. För vilka a kan man definiera $f(2)$ så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 2$?

1.10 Visa att ekvationen $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$ har en reell rot i vart och ett av intervallen $[0, 1]$, $[1, 2]$ och $[2, 3]$.

1.11 För funktionen $f(x) = x + 1/x$ gäller att $f(-1) = -2$ och $f(1) = 2$. Följer av detta att det finns ett tal c sådant att $-1 < c < 1$ och $f(c) = 0$?

1.12 Visa att ekvationen $(x + 1)e^{-x} = 1/2$ har minst två reella rötter.

1.13 Funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och $0 < f(x) < 1$ för alla $x \in [0, 1]$. Visa att det finns minst ett tal c i det öppna intervallet $]0, 1[$ sådant att $f(c) = c$.

1.14 Bevisa att ekvationen $x^5 + x^3 + x = 2$ har precis en reell rot och att den ligger i det öppna intervallet $]0, 1[$.

1.15 Visa att ekvationen $\tan x + x = 0$ har precis en rot i varje öppet intervall som är av formen $\big](n - 1/2)\pi, (n + 1/2)\pi\big[$, där $n \in \mathbb{Z}$.

1.16 Ange vilka av följande funktioner som är likformigt kontinuerliga:

a) $e^x - \sin x,\ \ 0 \le x \le 1,$ b) $2x,\ \ 0 < x \le 1,$ c) $\dfrac{1}{x},\ \ 0 < x < 1,$

d) $e^x \cos\dfrac{1}{x},\ \ 0 < x < 1,$ e) $\arctan x,\ \ -\infty < x < \infty.$

1.17 Antag att $f'''(x)$ existerar. Bestäm y'' och y''' om

a) $y = f(x^2)$, b) $y = f(1/x)$, c) $y = f(\ln x)$.

1.18 Bestäm y'' om

a) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, b) $y = \ln f(x)$, c) $y = x\big(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big)$.

1.19 Bestäm y' då

a) $y = x^x$, b) $y = x^{x^x}$, c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

d) $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

1.20 Låt $y = f(x)$ vara deriverbar tillräckligt många gånger. Bestäm derivatorna x', x'', x''' och $x^{(4)}$, där $x = f^{-1}(y)$, om de existerar.

1.21 Betrakta funktionen $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Vi har att $f(1) = f(-1) = 0$, men det finns ingen punkt $x \in\ ]-1, 1[$ sådan att $f'(x) = 0$. Hur går detta ihop med Rolles sats?

1.22 Antag att $f(x)$ är deriverbar i intervallet $]a, b[$ och att $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. Visa att det finns en punkt $c \in\ ]a, b[$ sådan att $f'(c) = 0$.

1.23 Antag att $f \in C^{n-1}_{[x_0, x_n]}$, att $f^{(n)}$ existerar i $]x_0, x_n[$ och att $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, där $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Visa att det finns minst en punkt $c \in\ ]x_0, x_n[$ sådan att $f^{(n)}(c) = 0$.

1.24 Betrakta polynomet $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, där $a_n \ne 0$ och $a_i \in \mathbb{R}$ för $i = 0, \ldots, n$. Visa att om P har n reella rötter så har dess derivata $n - 1$ reella rötter.

1.25 Visa att $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$ är konstant för $x > 0$.

1.26 Visa att $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ är konstant för $-1 \leq x \leq 1$.

1.27 Visa att

a) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$, b) $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ för $0 < b < a$,

c) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

1.28 Vad kan man säga om funktionen f om $f^{(n)}(x) = 0$ för något $n \geq 1$?

1.29 Visa att $f(x) = (1 + 1/x)^x$ är växande på $]-\infty, -1[$ och på $]0, \infty[$, men inte på $]-\infty, -1[\cup]0, \infty[$.

1.30 Ange på vilka intervall följande funktioner är strängt monotona:

a) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, b) $y = x + |\sin 2x|$.

1.31 Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$, c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x \,\ln(\ln x)}$,

d) $\displaystyle\int x\sqrt{2-5x}\,dx$, e) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$, f) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$,

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$, h) $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$, i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,

j) $\displaystyle\int \frac{x\ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\,\bigr)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

1.32 Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$, b) $\displaystyle\int \Bigl(1-\frac{1}{x^2}\Bigr)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx$, d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,

e) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$, g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$,

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$, i) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$, j) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$.

1.33 Beräkna $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\,\bigr)}{1+x^2}}\,dx$.

1.34 Beräkna

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$, b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^1 \sqrt{1+t^3}\,dt$, c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

1.35 Beräkna

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{\arcsin x} e^{\sin^2 t}\cos t\,dt$, b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^1 \frac{e^t}{e^{4t}+2}\,dt$, c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \ln^3 t\,dt$.

1.36 Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^{2x}(\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.37 Är det korrekt att göra variabelbytet $x = 1/t$ i integralen $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$?

1.38 Antag att $f > 0$ och $f \in C$. Visa att $\varphi(x) = \dfrac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ är växande för $x > 0$.

1.39 Antag att $f \in C$. Visa att $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx$ för $a > 0$.

1.40 Antag att f är kontinuerlig på $[0, 1]$. Visa att

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

1.41 Beräkna $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$ om $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$.

1.42 Bestäm $y^{(10)}(0)$ om

a) $y = x^2 e^x$, b) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

1.43 Bestäm $f^{(n)}(0)$ om $f(x) = x/\sqrt{1-x}$.

1.44 Bestäm $f^{(n)}(a)$ om $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$.

1.45 Visa att $f(x) = xe^{x^2}$ är inverterbar och bestäm Maclaurinutvecklingen av $f^{-1}(x)$ med restterm $O(x^7)$.

ANALYS I FLERA VARIABLER

2.1 Betrakta följande mängder i $\mathbb{R}^2$:

$M_1 = \{(x,y) :\ 4x^2 + 9y^2 \le 36\}$,

$M_2 = \{(x,y) :\ |x| + |y| < 1\}$,

$M_3 = \{(x,y) :\ x^2 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$,

$M_4 = \{(x,y) :\ (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0\}$,

$M_5 = \{(x,y) :\ \max(|x|, |y|) \le 1\}$,

$M_6 = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \le 4x\} \cap \{(x,y) :\ |y| \le x\}$.

a) Skissera mängderna.

b) Ange mängdernas inre punkter och randpunkter.

c) Ange om mängderna är öppna eller slutna.

d) Vilka av mängderna är kompakta?

2.2 Betrakta följande mängder i $\mathbb{R}^3$:

$M_1 = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 5 \le 0\}$,

$M_2 = \{(x,y,z) :\ z = 0\}$,

$M_3 = \{(x,y,z) :\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2,\ z \ge 0\}$.

a) Skissera mängderna.

b) Ange mängdernas inre punkter och randpunkter.

c) Ange om mängderna är öppna eller slutna.

d) Vilka av mängderna är kompakta?

2.3 Låt I vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Betrakta i $\mathbb{R}^2$ mängden $M = \{(x,y) :\ x \in I,\ y = 0\}$.

a) Är M öppen i $\mathbb{R}^2$ om I är öppen i $\mathbb{R}$?

b) Är M sluten i $\mathbb{R}^2$ om I är sluten i $\mathbb{R}$?

2.4 Låt A vara en öppen delmängd av $\mathbb{R}^n$ och antag att $x \in A$. Är $A \setminus \{x\}$ öppen?

2.5 Antag att $M = \{1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ \ldots,\ n/(n+1),\ \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.

a) Ange mängden av inre punkter och mängden av randpunkter till M.

b) Är M sluten?

2.6 a) Bevisa att snittet av ändligt många öppna mängder är öppet.

b) Bevisa att unionen av ändligt många slutna mängder är sluten.

2.7 a) Låt M_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ vara öppna. Visa att $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ är öppen.

b) Låt M_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ vara slutna. Visa att $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ är sluten.

2.8 Antag att $M_i = \left]1 - 1/i, 3 + 1/i\right[$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Bestäm $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$. b) Är M öppen?

2.9 Antag att $M_i = \left[1/i, 1 - 1/i\right]$, $i = 2, 3, 4, \ldots$.

a) Bestäm $M = \bigcup_{i=2}^{\infty} M_i$. b) Är M sluten?

2.10 Antag att $\Pi_i = \{(x,y) : a_i \le x \le b_i,\ c_i \le y \le d_i\}$ är en avtagande följd av slutna rektanglar (dvs $\Pi_1 \supseteq \Pi_2 \supseteq \Pi_3 \supseteq \ldots$) sådana att $b_i - a_i \to 0$ och $d_i - c_i \to 0$ då $i \to \infty$. Visa att $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i$ innehåller precis en punkt.

2.11 Visa att man från varje begränsad punktföljd i $\mathbb{R}^n$ kan välja en konvergent delföljd.

2.12 Visa med hjälp av $\varepsilon\delta$-definitionen att $2x^2 + \dfrac{3}{y^2} \to 5$ då $(x,y) \to (-1,1)$.

2.13 Visa med hjälp av $\varepsilon\delta$-definitionen att $\sin x + \dfrac{1}{y} + z^2 + 1 \to 6$ då $(x,y,z) \to (0,1,2)$.

2.14 Visa med hjälp av $\varepsilon\delta$-definitionen att $z = 2xy$ är kontinuerlig i punkten (x_0, y_0).

2.15 Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+|y|}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ kontinuerlig i origo?

2.16 Ange till vilka punkter följande funktioner kan utvidgas kontinuerligt:

a) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{x-y},\ \ x \ne y,$ b) $f(x,y) = \arctan \Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^2,\ \ x \ne y.$

2.17 Låt $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ och antag att funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Vilka av följande påståenden om värdemängden V_f kan vara sanna?

a) $V_f =]1,2[$. b) $V_f = [1,2[$. c) $V_f = [1,2]$. d) $V_f = [1,2] \cup [3,4]$.

2.18 Antag att funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Vilka av följande slutsatser kan dras från denna förutsättning?

a) Funktionen $t \mapsto g(t) = f(\cos t^2,\ t^2/(1+t^4))$, $t \in \mathbb{R}$, är begränsad.

b) Funktionen $t \mapsto h(t) = f(t^2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, är begränsad.

2.19 Låt $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)\arctan(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. På vilka delmängder nedan är f begränsad?

a) $M = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 10\}$. b) $M = \{(x,y) : x^2+y^2 \ge 1\}$.

c) $M = \{(x,y) : (x,y) \ne (0,0)\}$.

2.20 Ange vilka av följande funktioner som är likformigt kontinuerliga:

a) $f(x) = \ln x,\ \ x \ge 1,$ b) $f(x) = x^2,\ \ 0 < x < 1,$ c) $f(x) = x^2,\ \ x \ge 1,$

d) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x},\ \ 0 < x < 1,$ e) $f(x,y) = xy,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

f) $f(x,y) = \cos\sqrt{xy},\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,$ g) $f(x,y) = \arctan\left|\dfrac{y}{x}\right|,\ \ x \ne 0.$

2.21 Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{(x^4+y^2)^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Är funktionen f, i punkten $(0,0)$,

a) kontinuerlig, b) partiellt deriverbar, c) differentierbar?

2.22 Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ differentierbar i origo?

2.23 Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy^2}{x^2+y^2+xy}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Är funktionen f

a) kontinuerlig, b) partiellt deriverbar, c) differentierbar,

d) ett element i klassen C^1?

2.24 Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Är f differentierbar i $(0,0)$?

2.25 Antag att $z = f(x,y)$ är differentierbar i punkten (a,b). Visa att f är kontinuerlig och partiellt deriverbar i (a,b).

2.26 Låt $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Visa att

a) f'_x och f'_y är inte kontinuerliga i $(0,0)$,

b) f'_x och f'_y är obegränsade i varje omgivning av $(0,0)$,

c) $f(x,y)$ är differentierbar.

2.27 Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Existerar f''_{xy} i $(0,0)$?

2.28 Låt $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Beräkna $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$. b) Är det sant att $f \in C^2$?

2.29 Beräkna differentialen till följande funktioner:

a) $f(x,y) = \ln\Big(1 + \dfrac{x}{y}\Big)$, b) $f(x,y,z) = x^{yz}$.

2.30 En cirkelsektor har medelpunktsvinkeln 80° och radien 20 cm. Bestäm med hjälp av differentialen för cirkelsektorns area ungefär hur mycket radien skall ökas om medelpunktsvinkeln minskas med 1° och arean skall vara oförändrad.

2.31 Betrakta $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$. Jämför $\Delta f = f(3+h, 4+k) - f(3,4)$ och $df = hf'_x(3,4) + kf'_y(3,4)$, om $h = 0.1$ och $k = 0.2$.

2.32 En rät cirkulär kon har höjden 30 cm och basradien 10 cm. Uppskatta med en differential hur mycket volymen ändras om höjden ökar med 3 mm och basradien minskar med 1 mm.

2.33 Visa att funktionen $z = yf(x^2 - y^2)$ satisfierar ekvationen $\dfrac{z'_x}{x} + \dfrac{z'_y}{y} = \dfrac{z}{y^2}$.

2.34 Bestäm alla lösningar $f(x,y)$ till systemet $\begin{cases} f'_x = x + y^2/x, \\ f'_y = 2y\ln x + \cos y. \end{cases}$

2.35 Visa att funktionen $f(x,y) = xy + xe^{y/x}$ är en lösning till den partiella differentialekvationen $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - xy = f$.

2.36 Låt $f(t) \in C^1$ och sätt $F(x,y) = xyf(x^2+y^2)$. Bestäm $f(t)$ så att F uppfyller ekvationen $F'_x(x,y)/y + F'_y(x,y)/x = F(x,y)/xy$ då $x, y > 0$.

2.37 Låt $F(x,y) \in C^2$ i en omgivning av origo. För funktionerna $f_1(t) = F(2t, -t)$, $f_2(t) = F(3t, -2t)$ och $f_3(t) = F(-t, 2t)$ gäller att $f''_n(0) = 1$, $n = 1, 2, 3$. Beräkna $f''(0)$, där $f(t) = F(t,t)$.

2.38 Antag att $f \in C^2$ och att $f'_u(2,1) = -f'_v(2,1) = 1$, $f''_{uu}(2,1) = -f''_{vv}(2,1) = 2$ och $f''_{uv}(2,1) = 3$. Sätt $g(x,y) = f(x^2 + e^{xy}, x^2)$ och beräkna $g''_{yx}(1,0)$.

2.39 Bestäm gradienten till

a) $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{x-y}$ i punkten $(2,1,2)$,

b) $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ i en godtycklig punkt.

2.40 Bestäm riktningsderivatan till $f(x,y,z) = xe^{yz}$ i punkten $(2,1,0)$ i den riktning som ges av vektorn $(2,1,2)$.

2.41 Växer funktionen $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$ i punkten $(2,-1)$ snabbare i x-axelns riktning än i y-axelns?

2.42 Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = (x/y)^z$ i punkten $(1,1,1)$ i den riktning som ges av vektorn $(2,1,-1)$.

2.43 Låt v vara en tangentvektor med positiv x-koordinat till parabeln $y = x^2 - x + 2$ i punkten $(1,2)$. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = x^2 - 3xy$ i denna punkt i den riktning som ges av v.

2.44 I vilken riktning är riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = xy + e^{yz} + z$ i punkten $(1,0,2)$ störst respektive minst? Bestäm även riktningsderivatans största respektive minsta värde.

2.45 Visa att origo är en stationär punkt, och ange dess karaktär, för funktionerna

a) $f(x,y) = x^4 + y^4$, b) $f(x,y) = x^4 + y^3$.

2.46 Beräkna den totala derivatan av

a) $f(x,y) = (xy^2,\ x^2 + y^2,\ y(1-x^2))$, b) $f(x,y,z) = (e^x,\ e^{x+y},\ e^{x+y+z})$,

c) $f(x,y,z) = (x+y+z,\ xyz, \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2))$,

d) $f(x,y,z) = (xe^{yz},\ yze^x)$.

2.47 En differentierbar funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan för x nära en punkt a approximeras med avbildningen $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, där $f'(a)$ är funktionalmatrisen. Ange denna approximation om $f(x,y,z) = (e^x,\ e^{x+y},\ e^{x+y+z})$ och $a = (0,1,-1)$.

2.48 Antag att en avbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har en nollskild total derivata $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ i origo. Hur avbildar f approximativt små omgivningar av origo?

2.49 Den linjära avbildningen $\begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = -x + y \end{cases}$ överför kvadraten

$$S = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$$

i xy-planet på en mängd S' i uv-planet.

a) Bestäm S'. b) Beräkna areorna $m(S)$ och $m(S')$. c) Beräkna $\left|\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}\right|$.

d) Kontrollera att $\dfrac{m(S')}{m(S)} = \left|\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}\right|$.

2.50 Avbildningen $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avbildar rektangeln

$$S = \{(r, \theta) : \ r_0 \le r \le r_0 + h, \ \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + k\},$$

där $r_0 > 0$, $h > 0$ och $0 < k < 2\pi$, på en mängd S' i xy-planet.

a) Bestäm S'. b) Beräkna areorna $m(S)$ och $m(S')$. c) Beräkna $\left|\dfrac{d(x, y)}{d(r, \theta)}\right|$.

d) Bestäm $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{m(S')}{m(S)}$ och jämför med c).

2.51 Genom sambandet $\begin{cases} u = ye^x \\ v = ye^{-x} \end{cases}$ definieras en omvändbar avbildning av området $S = \{(x, y) : \ x, y > 0\}$ på en mängd S' i uv-planet. Visa detta och bestäm S'.

2.52 Betrakta avbildningen $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^3 y. \end{cases}$

a) Bevisa att det finns en omgivning av punkten $(1, 1)$ sådan att restriktionen av avbildningen till denna omgivning har invers.

b) Bestäm inversens partiella derivator x'_u, x'_v, y'_u och y'_v i punkten $(u, v) = (0, 1)$.

2.53 Ange om ekvationen $f(x, y) = 0$ definierar y som en funktion av x i en omgivning av punkten (a, b), om

a) $f(x, y) = xy - \sin(x + y)$, $(a, b) = (0, 0)$,

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $(a, b) = (2, 0)$,

c) $f(x, y) = y^3 - x^2$, $(a, b) = (0, 0)$,

d) $f(x, y) = y^3 - x^4$, $(a, b) = (0, 0)$.

Bestäm även derivatan $y'(0)$ i de fall den existerar.

2.54 Visa att ekvationen $x^2 + y^4 + y = 0$ i en omgivning av punkten $(0, 0)$ definierar y som en funktion av x. Har denna funktion $y = f(x)$ en lokal extrempunkt i $x = 0$?

2.55 I en liksidig triangel med sidan $2a$ inskrivs två rektanglar som ligger på varandra. Bestäm det största värdet som summan av rektangelytorna kan anta.

2.56 Beräkna $f'(x)$, för $x > 0$, om

a) $f(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin xy}{y}\, dy$, b) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin xy}{y}\, dy$,

c) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + xy)\, dy$, d) $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{y} e^{-xy^2}\, dy$.

2.57 a) Beräkna $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1+ax}$ då $a, b > 0$.

b) Visa att $\displaystyle\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2}\ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}$.

2.58 Antag att f är deriverbar. Beräkna $F''(x)$ om $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x+y)f(y)\,dy$.

2.59 Antag att $f(x,y) \in C^2$. Beräkna $\displaystyle\iint_D f''_{xy}\,dxdy$, där D är en kvadrat med hörn i punkterna $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ och $(1,-1)$, om f antar värdena 1, 2, 3 och 4 i respektive hörn.

2.60 Beräkna $\displaystyle\iint_D |xy - x - y|\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 3, \ 2 \le y \le 4\}$.

2.61 Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx \right) dy$.

2.62 Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{\ln(x-y)}{(x^2-y^2)\ln(x+y)}\,dxdy$, där D är en kvadrat med hörn i punkterna $(2,0)$, $(3,1)$, $(4,0)$ och $(3,-1)$.

2.63 Beräkna

a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, där D ges av $\begin{cases} 4x \le x^2+y^2 \le 8x, \\ 0 < x \le y \le 2x, \end{cases}$

b) $\displaystyle\iint_D \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, där D ges av $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4, \\ x+y \ge 1, \\ x \ge 0, \ y \ge 0, \end{cases}$

c) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, där D ges av $\begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 2, \\ x^2 \le y \le x^2+1, \\ x \ge 0, \ y \ge 0. \end{cases}$

2.64 Beräkna

a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2y+y^3}$, där D ges av $\begin{cases} x \le y \le 2x, \\ x \ge 1, \end{cases}$

b) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, där D ges av $\begin{cases} 1 \le xy \le 3, \\ y \le x, \ x > 0, \end{cases}$

c) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x-y}}\,dxdy$, där D är parallellogramet med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,2)$, $(4,0)$ och $(6,2)$,

d) $\displaystyle\iint_D \ln(x+y)\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : \ |x|+|y| \le 1, \ x+y > 0\}$.

2.65 a) Antag att funktionen $f(t)$ är av klass C^2. Visa att

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f''(z)\,dxdydz = 2\pi\big(f(1) - f(0) - f'(0)\big)$$

om $D = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 \le 1, \ z > 0\}$.

b) Beräkna integralen om $f(t) = 2^t$.

2.66 Beräkna volymen av den parallellepiped som ges av $\begin{cases} 0 \le x+y+z \le 1, \\ 0 \le 2x-y+z \le 1, \\ 0 \le 3x+y-z \le 1. \end{cases}$

2.67 Räkna ut $\int \ldots \int_D (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, där D ges av

$$\begin{cases} 0 \le x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1, \\ 0 \le x_1 - x_2 + \ldots + x_n \le 1, \\ \ldots \\ 0 \le x_1 + x_2 + \ldots - x_n \le 1. \end{cases}$$

SVAR TILL UPPGIFTER

1.1 a) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$, b) $\inf M = -4$, $\sup M = 2$.

1.6 a) $\dfrac{mn(n-m)}{2}$, b) $\dfrac{n(n+1)}{2}$, c) $x + \dfrac{a}{2}$, d) $x^2 + ax + \dfrac{a^2}{3}$,

e) 1, f) e^2, g) $\dfrac{1}{2}$, h) $\dfrac{1}{3}$.

1.7 I alla $x \neq 1$.

1.8 a) I alla $x \neq \pm\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, b) i alla $x \neq -\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

c) i alla $x \neq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

1.9 $a = 1/4$ (sätt då $f(2) = -1/16$).

1.11 Nej, ty f är inte definierad på $[-1, 1]$.

1.16 a), b) och e).

1.17 a) $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$, $y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$,

b) $y'' = \dfrac{1}{x^4} f''(1/x) + \dfrac{2}{x^3} f'(1/x)$, $y''' = -\dfrac{1}{x^6} f'''(1/x) - \dfrac{6}{x^5} f''(1/x) - \dfrac{6}{x^4} f'(1/x)$,

c) $y'' = \dfrac{1}{x^2}\big(f''(\ln x) - f'(\ln x)\big)$, $y''' = \dfrac{1}{x^3}\big(f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)\big)$.

1.18 a) $y'' = \dfrac{3x}{(1-x^2)^2} + \dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$,

b) $y'' = -\dfrac{1}{f^2(x)}(f')^2(x) + \dfrac{1}{f(x)} f''(x)$,

c) $y'' = -\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$.

1.19 a) $y' = (1 + \ln x)x^x$, b) $y' = \left(\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)x^{x+x^x}$,

c) $y' = \dfrac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, d) $y' = -\sin 2x \cos(\cos 2x)$.

1.20 $x' = \dfrac{1}{y'}$, $x'' = -\dfrac{y''}{(y')^3}$, $x''' = -\dfrac{y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^5}$,

$x^{(4)} = -\dfrac{(y')^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15(y'')^3}{(y')^7}$.

1.21 $f'(0)$ existerar inte, så förutsättningarna i Rolles sats är inte uppfyllda.

1.28 f är ett polynom vars grad är högst $n - 1$.

1.30 a) Funktionen är strängt växande på $[-1, 1]$ och strängt avtagande på $]-\infty, -1]$ och på $[1, \infty[$,

b) för $n \in \mathbb{Z}$ är funktionen strängt växande på $[n\pi/2, n\pi/2 + \pi/3]$ och strängt avtagande på $[n\pi/2 + \pi/3, (n+1)\pi/2]$.

1.31 a) $e^x + x - 2\ln(e^x+1) + C$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\big(\sqrt{3/2}\,x\big) + C$, c) $\ln|\ln(\ln x)| + C$,

d) $-\dfrac{2}{375}(15x+4)(2-5x)^{3/2} + C$, e) $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$,

f) $\dfrac{x}{2}\big(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\big) + C$, g) $-\cot x \ln(e\sin x) - x + C$,

h) $-\dfrac{2}{\ln 5}5^{-x} + \dfrac{1}{5\ln 2}2^{-x} + C$, i) $\dfrac{1}{3}\big((x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\big) + C$,

j) $\sqrt{1+x^2}\ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\,\big) - x + C$, k) $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$.

1.32 a) $x - \ln(1+e^x) + C$, b) $\dfrac{4}{7}x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C$,

c) $\dfrac{1}{n}\big(x^n - \ln|1+x^n|\big) + C$ om $n \neq 0$, $\dfrac{1}{2}\ln|x| + C$ om $n = 0$,

d) $\dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + C$, e) $x - \dfrac{3}{2}\arctan x + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + C$,

f) $-\dfrac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C$, g) $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \dfrac{1}{8}\ln\big(x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\,\big) + C$,

h) $\dfrac{1}{2}\big(2\sqrt{x} + x - \sqrt{x(1+x)} + \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})\big) + C$,

i) $-\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x + C$, j) $\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$.

1.33 $\dfrac{2}{3}\ln^{3/2}\big(x + \sqrt{1+x^2}\,\big) + C$.

1.34 a) $\sqrt{1+x^4}$, b) $-\sqrt{1+x^3}$, c) $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^6}}$.

1.35 a) e^{x^2}, b) $-\dfrac{1}{x^4+2}$, c) $(16x-1)\ln^3 x$.

1.36 a) 1, b) $\dfrac{\pi^2}{4}$.

1.37 Nej, förutsättningarna i satsen om variabelbyte är inte uppfyllda.

1.41 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ och $y''(0) = 0$.

1.42 a) 90, b) 0.

1.43 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och $f^{(n)}(0) = \dfrac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$, $n \geq 2$.

1.44 $n!\varphi(a)$.

1.45 $f^{-1}(x) = x - x^3 + \dfrac{5x^5}{2} + O(x^7)$.

2.1 c) M_2 och M_4 är öppna, M_1, M_3, M_5 och M_6 är slutna.

d) M_1, M_3, M_5 och M_6.

2.2 c) Alla är slutna. d) M_1 och M_3.

2.3 a) Nej. b) Ja.

2.4 Ja.

2.5 a) $M^\circ = \emptyset,\ \partial M = M \cup \{1\}$. b) Nej.

2.8 a) $M = [1, 3]$. b) Nej.

2.9 a) $M =]0, 1[$. b) Nej.

2.15 Ja.

2.16 a) Inga punkter, b) alla punkter utom origo.

2.17 c).

2.18 a).

2.19 a), b) och c).

2.20 a) och b).

2.21 a) Nej, b) ja, c) nej.

2.22 Nej.

2.23 a) Ja, b) ja, c) nej, d) nej.

2.24 Nej.

2.27 Nej.

2.28 a) $f''_{xy} = -1,\ f''_{yx} = 1$, b) nej.

2.29 a) $df = \dfrac{1}{x+y}\Big(dx - \dfrac{x}{y}\,dy\Big)$,

b) $df = x^{yz}\Big(\dfrac{yz}{x}\,dx + z\ln x\,dy + y\ln x\,dz\Big)$.

2.30 $\dfrac{1}{8}$ cm.

2.31 $\Delta f = 0.0798\ldots,\ df = 0.08$.

2.32 Volymen minskar med ungefär $31.4\,\mathrm{cm}^3$ (exakt värde: $31.72\ldots\ \mathrm{cm}^3$).

2.34 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + y^2\ln x + \sin y + C,\ C \in \mathbb{R}$.

2.36 $f(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}},\ C \in \mathbb{R}$.

2.37 4.

2.38 11.

2.39 a) $(-4, 4, 4)$ b) $\dfrac{1}{e^x + e^y}(e^x, e^y)$.

2.40 2.

2.41 Nej.

2.42 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

2.43 $-\frac{7}{\sqrt{2}}$.

2.44 Största värde $\sqrt{10}$ i riktning $(0,3,1)$, minsta värde $-\sqrt{10}$ i riktning $-(0,3,1)$.

2.45 a) Strängt lokalt (och globalt) minimum,
b) varken lokalt maximum eller lokalt minimum.

2.46 a) $\begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & 2y \\ -2xy & 1-x^2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} & 0 \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ \dfrac{2x}{1+x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2y}{1+x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2z}{1+x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} e^{yz} & xze^{yz} & xye^{yz} \\ yze^x & ze^x & ye^x \end{pmatrix}$.

2.47 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & e & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}$.

2.48 Omgivningen skalas med faktorn r och vrids vinkeln θ, där $(a,b) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, och flyttas sedan till $f(0,0)$.

2.49 a) S' är ett parallellogram med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,-1)$ och $(5,0)$.
b) $m(S) = 1$, $m(S') = 5$. c) 5.

2.50 a) S' består av de punkter i xy-planet vars avstånd r till origo och vinkel θ mot x-axeln uppfyller olikheterna i definitionen av S.
b) $m(S) = hk,\ m(S') = r_0hk + h^2k/2$, c) $|r|$, d) r_0.

2.51 $S' = \{(u,v) : 0 < v < u\}$.

2.52 b) $x'_u = \frac{1}{8}$, $x'_v = \frac{1}{4}$, $y'_u = -\frac{3}{8}$, $y'_v = \frac{1}{4}$.

2.53 a) Ja, $y'(0) = -1$, b) nej, c) ja, $y'(0)$ existerar inte, d) ja, $y'(0) = 0$.

2.54 Ja (lokalt maximum).

2.55 $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

2.56 a) $\frac{1}{x}(\sin 2x - \sin x)$, b) $\frac{3\sin x^3}{x} - \frac{2\sin x^2}{x}$,
c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)$, d) $\frac{1}{2x}(3e^{-x^3} - 2e^{-x^2})$.

2.57 a) $\dfrac{1}{a}\ln(1+ab)$.

2.58 $3f(x)+2xf'(x)$.

2.59 -2.

2.60 $8+\ln 3$.

2.61 $\dfrac{1}{6}(e^9-1)$.

2.62 $\dfrac{3}{4}\ln^3 2$.

2.63 a) $\dfrac{3}{128}$, b) $\dfrac{\pi+2}{4}$, c) $\dfrac{66-5\sqrt{5}-13\sqrt{13}}{48}$.

2.64 a) $\dfrac{3\ln 2-\ln 5}{2}$, b) $\dfrac{\pi\ln 3}{8}$, c) $\dfrac{56}{3}$, d) -1.

2.65 b) $2\pi(1-\ln 2)$.

2.66 $\dfrac{1}{10}$.

2.67 $\dfrac{1}{2^n}$.