Svar, TATA72, 2023-12-11

1. a) Se bok.

   b) Sätt $x = 3+h$. Låt $\varepsilon > 0$.

   $$\left|\frac{x-1}{x-2} - 2\right| = \left|\frac{2+h}{1+h} - 2\right| = \left|\frac{2+h-2-2h}{1+h}\right| = \frac{|h|}{|1+h|} \leq \Big/ \text{om } |h| \leq \tfrac{1}{4} \Big/$$

   $$\leq \frac{|h|}{3/4} < \Big/ \text{om } |h| < \tfrac{3\varepsilon}{4} \Big/ < \varepsilon.$$

   Så om $|x-3| < \delta = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{3\varepsilon}{4}\right)$ är $\left|\frac{x-1}{x-2} - 2\right| < \varepsilon$.

2. a) Se bok.

   b) f är kont. på $]0,1]$, och $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, ty $1-\cos x \to 0$ då $x \to 0+$ och $\sin(1/x)$ är begränsad, så f är även kont. i 0, ty $f(0)=0$. Satsen om största och minsta värde ger nu att f har ett minsta värde på $[0,1]$.

3. a) Se bok.

   b) Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Om $a=b$ är olikheten sann ($0 \geq 0$), så vi antar nu att $a<b$. Sätt $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Medelv.satsen ger att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, för något $\xi \in]a,b[$.

   $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$, så ...

x		2	
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$

   f' har globalt minimum i 2, och $f'(2) = -e^{-2}$.

   Alltså fås $be^{-b} - ae^{-a} \geq -e^{-2}(b-a)$.

4. Sätt $g(x) = f(x) - \eta x$, $x \in \mathbb{R}$. Då är g deriverbar, och $g'(a) = f'(a) - \eta < 0$, och $g'(b) = f'(b) - \eta > 0$. Enligt satsen om största och minsta värde har g ett minsta värde på $[a,b]$, och det kan inte antas i a eller b (ty $g'(a)<0$, $g'(b)>0$). Så det finns ett $\xi \in]a,b[$ där g:s minimum på $[a,b]$ antas, och eftersom g är deriverbar är $g'(\xi) = 0$, dvs $f'(\xi) = \eta$.