Svar, TATA72, 2024-03-15

1. a) Se bok.

   b) Faktorisering ger: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

   Låt $\varepsilon>0$. För $x \neq 1,2$: $\left|\frac{x-2}{x^3-3x+2}-1\right| = \left|\frac{1}{x-1}-1\right| =$

   $= \Big/ \begin{matrix} x=2+h, \\ h\neq 0,-1 \end{matrix} \Big/ = \left|\frac{1}{1+h}-1\right| = \left|\frac{1-1-h}{1+h}\right| = \frac{|h|}{|1+h|} \leq$

   $\leq \Big/ \text{om } |h|\leq \tfrac{1}{2} \Big/ \leq \frac{|h|}{1/2} < \Big/ \text{om } |h|<\tfrac{\varepsilon}{2} \Big/ < \varepsilon.$

   Sätt $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Då är $\left|\frac{x-2}{x^2-3x+2}-1\right|<\varepsilon$ om $0<|x-2|<\delta$,

   så $\frac{x-2}{x^2-3x+2} \to 1$ då $x\to 2$.

2. a) Se bok.

   b) $f(x)=\arctan e^x$, $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\frac{1}{e^{-x}+e^x}$,

   så $|f'(x)|=\frac{1}{e^{-x}+e^x}\leq 1$, $x\in\mathbb{R}$, ty $e^x\geq 1$ om $x\geq 0$, och

   $e^{-x}\geq 1$ om $x\leq 0$ (och $e^x, e^{-x}>0$). (I självaverket är $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.)

   Medelvärdessatsen ger att $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|$, något ξ mellan x och y. Låt $\varepsilon>0$. Med $\delta=\varepsilon$ fås nu att

   $|f(x)-f(y)|\leq 1\cdot|x-y|<\varepsilon$ om $x,y\in\mathbb{R}$ och $|x-y|<\delta$.

3. a) Se bok.

   b) $f(x)=p(1/x)e^{-1/x}$ ger att $f'(x)=p(1/x)e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}+p'(1/x)\frac{-1}{x^2}e^{-1/x}=$

   $=\frac{1}{x^2}\left(p(1/x)-p'(1/x)\right)e^{-1/x}$, dvs $\underline{q(t)=t^2(p(t)-p'(t))}$.

4. Se bok.