

Kontrollskrivning i Matematisk fördjupning

2023-12-11 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.

Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 6/8/10 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Definiera vad som menas med att $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow a+$. (1p)
(b) Visa med $\varepsilon\delta$ -definitionen att $\frac{x-1}{x-2} \rightarrow 2$ då $x \rightarrow 3$. (2p)
2. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $a \in \mathbb{R}$. (1p)
(b) Visa att den funktion som ges av $f(x) = x^2 - 2(1 - \cos x) \sin(1/x)$ då $0 < x \leq 1$ och av $f(0) = 0$ har ett minsta värde på $[0, 1]$. (2p)
3. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator. (1p)
(b) Visa att $be^{-b} - ae^{-a} \geq -e^{-2}(b-a)$ om $a, b \in \mathbb{R}$ och $a \leq b$. (2p)
4. Antag att funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar, att $a < b$ och att $f'(a) < \eta < f'(b)$. Visa att det finns en punkt $\xi \in]a, b[$ sådan att $f'(\xi) = \eta$. *Tips: sätt $g(x) = f(x) - \eta x$.*

Lycka till!