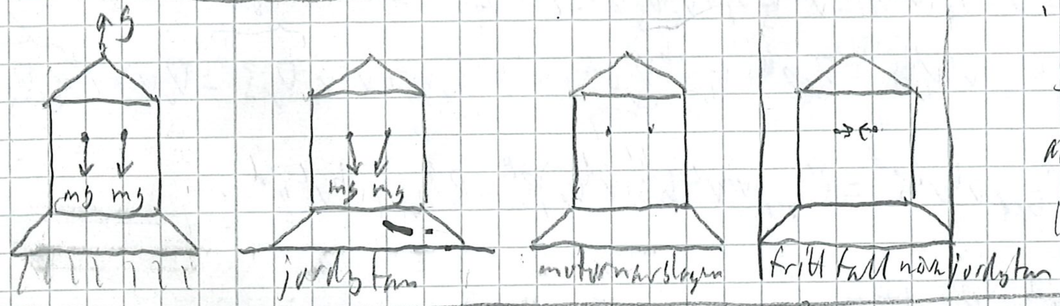
FÖ10

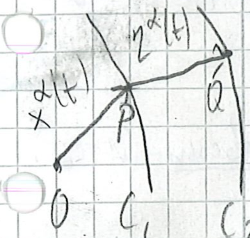
Icke-lokala experiment:



∴ Icke-lokala experiment kan skilja på gravitation och acceleration (till skillnad från lokala, ekvivalensprincipen)

"Geodetisk" deviation enl. Newton:

Koordinater $(x^\alpha)_{\alpha=1}^3 = (x,y,z)$, linjeelement $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$



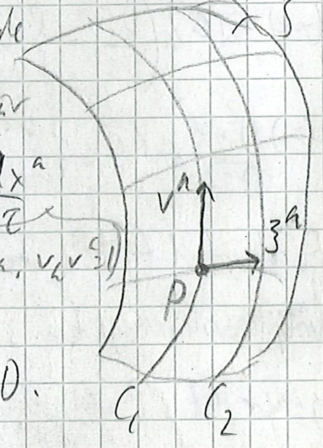
Metrik $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$. Två partiklar med massa m rör sig i en gravitationspotential ϕ längs C_1 resp. C_2. $C_1: x^\alpha = x^\alpha(t)$, $C_2: x^\alpha = x^\alpha(t)+\eta^\alpha(t)$, där η^α är en förbindande vektor (Jacobifält). Newton: $\begin{cases}\ddot x^\alpha = -(\partial^\alpha\phi)_P\\ \ddot x^\alpha+\ddot\eta^\alpha = -(\partial^\alpha\phi)_Q\end{cases}$

η^α liten $\Rightarrow (\partial^\alpha\phi)_Q \simeq (\partial^\alpha\phi)_P + (\eta^\beta\partial_\beta\partial^\alpha\phi)_P \Rightarrow \ddot\eta^\alpha \simeq -\eta^\beta\underbrace{\partial_\beta\partial^\alpha\phi}_{=:K^\alpha{}_\beta}$, dvs $\boxed{\ddot\eta^\alpha + K^\alpha{}_\beta\,\eta^\beta \simeq 0}$

OBS: I vakuum gäller också fältekvationen $\partial^\alpha\partial_\alpha\phi=0 \Leftrightarrow K^\alpha{}_\alpha=0$ (Laplaces ekv.)

Geodetisk deviation:

Betr. en 2-yta $S\subset M$ uppbyggd av en kongruens av tidsartade geodeter, dvs exakt en geodet går genom varje punkt på S. $S: x^a = x^a(\tau,\nu)$ där τ = egentid längs varje geodet och ν konstant på varje geodet. Sätt $v^a = \frac{\partial x^a}{\partial\tau}$ (s.a. $v_a v^a = -1$) och $\xi^a = \frac{\partial x^a}{\partial\nu}$. ξ^a kallas en förbindande vektor (Jacobifält). Då är



$$\overbrace{[v,\xi]^a}^{=L_v\xi^a} = v^b\partial_b\xi^a - \xi^b\partial_b v^a = \frac{\partial x^b}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\nu}\right) - \frac{\partial x^b}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\tau}\right) = \frac{\partial^2x^a}{\partial\tau\partial\nu}-\frac{\partial^2 x^a}{\partial\nu\partial\tau}=0.$$

Detta ger (där $X^b\nabla_b Y^a =: \nabla_X Y^a$)

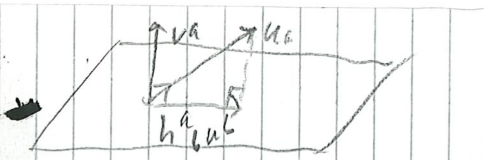
$$0 = L_v\xi^a = v^b\nabla_b\xi^a - \xi^b\nabla_b v^a = \nabla_v\xi^a - \nabla_\xi v^a \Rightarrow \nabla_v\nabla_v\xi^a = \nabla_v\nabla_\xi v^a \quad (*)$$

Av def. av $R^a{}_{bcd}$ följer (Ö.m.) att $\nabla_X(\nabla_Y Z^a) - \nabla_Y(\nabla_X Z^a) - \nabla_{[X,Y]}Z^a = R^a{}_{bcd}Z^bX^cY^d$, $\forall X,Y,Z$

Välj $X^a=Z^a=v^a$, $Y^a=\xi^a \Rightarrow \nabla_v(\nabla_\xi v^a) - \nabla_\xi(\underbrace{\nabla_v v^a}_{=0\text{, enl. geodetiska ekv.}}) - \nabla_{[v,\xi]}v^a = R^a{}_{bcd}v^bv^c\xi^d$

$(*) \Rightarrow \nabla_v\nabla_v\xi^a = \nabla_v\nabla_\xi v^a = R^a{}_{bcd}v^bv^c\xi^d \Leftrightarrow \boxed{\frac{D^2\xi^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd}v^bv^c\xi^d=0}$ (Ekv. för geodetisk deviation, Jacobis ekv.)

OBS: 4-dim ekvation. Innehåller mer information än Newtons motsvarighet.



Inför projektionsoperatorn $h^a{}_b = \delta^a{}_b - v^a v_b$, s.a. $h^a{}_b u^b = 0$ om $u^b \parallel v^b$ och $h^a{}_b u^b = u^a$ om $u^b \perp v^b$

(ty τ affin parameter)

Sätt $\eta^a := h^a{}_b \xi^b$. $v^a v_a = 1 \Rightarrow 0 = \nabla_\xi (v^a v_a) = v^a \nabla_\xi v_a + v_a \nabla_\xi v^a = 2 v_a \nabla_\xi v^a \Rightarrow$ $= \nabla_\xi v^b$ enl. (X)

$\frac{D\xi^a}{D\tau} = \nabla_v \xi^a = \nabla_v(\delta^a{}_b \xi^b) = \nabla_v((h^a{}_b + v^a v_b)\xi^b) = \nabla_v \eta^a + v_b \xi^b \underbrace{\nabla_v v^a}_{=0} + v^a \xi^b \underbrace{\nabla_v v_b}_{=0} + v^a v_b \nabla_v \xi^b = \nabla_v \eta^a + v^a v_b \overbrace{\nabla_\xi v^b}^{=0}$

så $\frac{D\xi^a}{D\tau} = \nabla_v \eta^a = \frac{D\eta^a}{D\tau}$. Vidare $R^a{}_{bcd} v^b v^c \xi^d = R^a{}_{bcd} v^b v^c (h^d{}_e + v^d v_e)\xi^e = R^a{}_{bcd} v^b v^c \eta^d$

Detta ger $\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd} v^b v^c \eta^d = 0$ (**)

Låt $(e_0)^a = v^a$ och fyll ut med $(e_\alpha)^a$, $\alpha = 1,2,3$ till ON-bas (tetrad) i någon punkt $P \in C_1$. ON betyder här att $g_{ab}(e_i)^a (e_j)^b = \eta_{ij} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

Linalg. $\Rightarrow$ Finns $(e^j)_a$, $j = 0,1,2,3$ s.a. $(e_i)^a (e^j)_a = \delta_i{}^j$ (matrisinvers!) $(e^j)_a$ kallas dualbasen till $(e_i)^a$.

OBS: $(e^i)_b (e_i)^a (e^j)_a = (e^i)_b \delta_i{}^j = (e^j)_b$, $j = 0,1,2,3 \Rightarrow (e^i)_b (e_i)^a = \delta_b{}^a$

Parallelltransportera tetraden till hela C_1 genom att kräva att $\frac{D}{D\tau}(e_i)^a = 0$ på hela C_1

Betr.

$\eta^a = \delta_b{}^a \eta^b = \overbrace{\eta^b (e^i)_b}^{=:\eta^i} (e_i)^a = \eta^i (e_i)^a = \overbrace{\eta^0}^{=\eta^b (e^0)_b = \eta^b v_b = 0} (e_0)^a + \eta^\alpha (e_\alpha)^a = \eta^\alpha (e_\alpha)^a \Rightarrow (e^\alpha)_a \eta^a = \overbrace{(e^\alpha)_a (e_\beta)^a}^{=\delta^\alpha{}_\beta} \eta^\beta = \eta^\alpha$

(**) $\Rightarrow (e^\alpha)_a \left(\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd} v^b v^c (e_\beta)^d \eta^\beta\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{D^2\eta^\alpha}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd} (e^\alpha)_a v^b v^c (e_\beta)^d \eta^\beta = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{D^2\eta^\alpha}{D\tau^2} + K^\alpha{}_\beta \eta^\beta = 0$, där $K^\alpha{}_\beta = -R^a{}_{bcd} (e^\alpha)_a v^b v^c (e_\beta)^d$. Samma struktur som Newtons motsvarighet!

Förslag till fältekvationer i vakuum: $K^\alpha{}_\alpha = 0 \Leftrightarrow R^a{}_{bcd} (e^\alpha)_a v^b v^c (e_\alpha)^d = 0$

Välj koordinatsystem s.a. $(e_0)^a|_P = (1,0,0,0) = v^a|_P$, $(e_1)^a|_P = (0,1,0,0)$ osv. Om $K^\alpha{}_\alpha = 0$ i P gäller det i P att $0 = R^\alpha{}_{00\alpha} = \underbrace{R^0{}_{000}}_{=0} + R^\alpha{}_{00\alpha} = R^a{}_{00a} = R^a{}_{bca} v^b v^c = -R_{bc} v^b v^c$ i detta koordinatsystem. VL, HL skalärer $\Rightarrow R_{bc} v^b v^c|_P = 0$ i alla koordinatsyst. och för alla tidsartade v^b i $P \Rightarrow R_{ab} = 0$ i P. P godt. $\Rightarrow R_{ab} = 0$

$\therefore$ $\boxed{R_{ab} = 0 \Leftrightarrow G_{ab} = 0}$ (Einsteins fältekvationer i vakuum)

Förklaring/resonemang på nästa sida

Einsteins ekvationer med materia: I SR beskrivs stoft av energi-rörelsemängdstensorn $T^{ab} = \rho_0 u^a u^b$, ρ_0 egendensiteten, u^a 4-hastigheten och T^{ab} uppfyller konserveringslagen $\partial_a T^{ab} = 0$. Naturligt att i GR kräva $\nabla_a T^{ab} = 0 \Leftrightarrow \nabla^a T_{ab} = 0$

Kontraherade Bianchi-identiteten $\Rightarrow \nabla^a G_{ab} = 0 \Rightarrow \boxed{G_{ab} = \kappa T_{ab}}$ (Einsteins fältekv. med materia), där κ = konst. är alltså en naturlig generalisering av vakuumekvationerna.

Ideala fluider: $\begin{cases} T^{ab} = (\rho_0 + p) u^a u^b - p\eta^{ab}, \\ \partial_a T^{ab} = 0 \end{cases}$ generaliseras till $\begin{cases} T^{ab} = (\rho_0 + p) u^a u^b - p g^{ab} \\ \nabla_a T^{ab} = 0 \end{cases}$

Nu är

$$0 \overset{?}{=} -R^a{}_{bcd}(e^\alpha)_a v^b v^c (e_\alpha)^d = -R^a{}_{bcd} v^b v^c \Big(\overbrace{(e^i)_a (e_i)^d}^{=\delta_a{}^d} - (e^0)_a \underbrace{(e_0)^d}_{=v^d}\Big) = /\text{tg } R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}/ = -R^a{}_{bca} v^b v^c$$

$$= + R_{bc} v^b v^c$$

Nu var både v^a och P godtyckliga, så då $R_{ab} = R_{ba}$ följer det att $R_{ab} = 0$ på hela M.

$$\nabla^b v_b = \delta^b{}_c \nabla^c v_b = \delta^b{}_d h^c{}_d \xi^d v_b = h^b{}_d \xi^d v_b = h^b{}_d \underbrace{v_b}_{=0} \xi^d = 0$$

__Einsteins ekv. med materia:__ Låt T_{ab} energi-rörelsemängdstensorn. I vakuum är $T_{ab} = 0$.

Naturlig generalisering av vakuumekvationerna: R_{ab} eller $G_{ab} = KT_{ab}$, K = konstant.

Vilken? För stoft och ideala fluider i SR gäller konservationslagen $\partial_a T^{ab} = 0$.

Naturligt att i GR kräva $\nabla_a T^{ab} = 0 \Leftrightarrow \nabla^a T_{ab} = 0$.

__OBS:__ $\nabla^a R_{ab} \neq 0$ i allmänhet, men enl. kontraherade Bianchi-identiteten är $\nabla^a G_{ab} = 0$

dvs endast $\boxed{G_{ab} = KT_{ab}}$ kan funka.

↳ Einsteins fältekvationer med materia