Lösningar, TATA77, 2021-10-27

1. $y''(t)+6y'(t)+13y(t)=6\delta(t-1),\quad t\geq 0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-3.$

Enkelsidig laplacetransform ger $(Y=\mathcal{L}_+y)$:

$$s^2Y(s)-1s-(-3)+6(sY(s)-1)+13Y(s)=e^{-s}\cdot 6,$$

$$(s^2+6s+13)Y(s)=s+3+e^{-s}\cdot 6,$$

$$Y(s)=\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}+e^{-s}\frac{6}{(s+3)^2+2^2},\quad \operatorname{Re} s>-3,\quad \text{som har}$$

inverstransform $\quad e^{-3t}(\cos 2t)\chi(t)+\left[3e^{-3t}(\sin 2t)\chi(t)\right]_{t\mapsto t-1}.$

Svar: $\quad y(t)=e^{-3t}\cos 2t+3e^{-3(t-1)}\sin 2(t-1)\cdot\chi(t-1),\quad t\geq 0.$

2. $u(n)+\sum_{k=0}^{n}4(n-k)u(k)=n,\quad n\in\mathbb{N}.$

Enkelsidig z-transform ger $(U=\mathcal{Z}_+u)$:

$$U(z)+\frac{4z}{(z-1)^2}U(z)=\frac{z}{(z-1)^2},\quad ((z-1)^2+4z)U(z)=z,$$

$$U(z)=\frac{z}{z^2+2z+1}=\frac{z}{(z+1)^2},\quad |z|>1,\quad \text{vars inverstransform}$$

är $\; -n(-1)^n\chi(n).$ $\qquad$ Svar: $\quad u(n)=(-1)^{n+1}n,\quad n\in\mathbb{N}.$

3. $\int_{-\infty}^{\infty}u(t-r)e^{-|r|}\,dr=2e^{-t^2},\quad t\in\mathbb{R}.$

Fouriertransform ger: $\quad \hat{u}(\omega)\cdot\frac{2}{1+\omega^2}=2\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4},$

så $\quad \hat{u}(\omega)=(1+\omega^2)\cdot\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}=(1-(i\omega)^2)\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4},$

vilket ger att $\quad u(t)=\left(1-\frac{d^2}{dt^2}\right)e^{-t^2}.$

Svar: $\quad u(t)=(3-4t^2)e^{-t^2},\quad t\in\mathbb{R}.$

4. a) $\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$

$\chi(-t)$ $\quad \frac{1}{-s}$, $\operatorname{Re}(-s) > 0$

$\chi(-(t-3))$ $\quad -\frac{e^{-3s}}{s}$, $\operatorname{Re} s < 0$

$e^{-t}\chi(3-t)$ $\quad -\frac{e^{-3(s+1)}}{s+1}$, $\operatorname{Re}(s+1) < 0$

Svar: $-\frac{e^{-3(s+1)}}{s+1}$, $\operatorname{Re} s < -1$.

b) $\frac{s}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re} s < 1$.

$\chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s < 0$

$e^{t}\chi(-t)$ $\quad -\frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re}(s-1) < 0$

Svar: $\delta(t) - e^{t}\chi(-t)$.

c) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Låt $\varphi \in \mathcal{H}$.

$\langle (u(t-a))^\wedge(s), \varphi(s)\rangle = \langle u(t-a), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle u(t), \hat{\varphi}(t+a)\rangle =$

$$/ \ \hat{\varphi}(t+a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(i\omega) e^{-i\omega(t+a)}\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega a}\varphi(i\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega = (e^{-sa}\varphi(s))^\wedge(t) \ /$$

$= \langle u(t), (e^{-sa}\varphi(s))^\wedge(t)\rangle = \langle \hat{u}(s), e^{-sa}\varphi(s)\rangle = \langle e^{-sa}\hat{u}(s), \varphi(s)\rangle$,

så $\widehat{u(t-a)}(s) = e^{-as}\hat{u}(s)$.

5. $u(t) = t^2$ då $-\pi \le t < \pi$, $T = 2\pi$ så $\Omega = 1$.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ n \neq 0}}{=} \frac{1}{2\pi}\left[t^2\frac{e^{-int}}{-in} - 2t\frac{e^{-int}}{(-in)^2} + 2\frac{e^{-int}}{(-in)^3}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\frac{(-1)^n}{n^2} - 2(-\pi)\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0. \quad (\hat{u}(0) \text{ behövs ej nedan.})$$

För $N \geq 1$: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t) - (S_N u)(t)|^2\, dt = $ / Parseval /

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(u - S_N u)^\wedge(n)|^2 = \sum_{|n|>N} |\hat{u}(n)|^2 = \sum_{|n|>N} \frac{4}{n^4} =$$

$$= 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^4} \leq 8\int_N^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 8\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_N^{\infty} = \underline{\underline{\frac{8}{3N^3}}}.$$

6. $u(t) = \ln(t^4+1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$u(t) = \ln t^4(1+t^{-4}) = 4\ln|t| + \ln(1+t^{-4})$, $t \neq 0$.

Sätt $v(t) = \ln|t|$ och $w(t) = \ln(1+t^{-4})$.

$w \in L^1(\mathbb{R})$ ty $w(t) = t^{-4} + \mathcal{O}(t^{-8})$ då $|t| \to \infty$ och

$w(t) = 4\ln|t| + \mathcal{O}(t^4)$ då $t \to 0$, så $\hat{w} \in C(\mathbb{R})$.

$v'(t) = \underline{t}^{-1}$, så $i\omega\hat{v}(\omega) = -\pi i\,\mathrm{sgn}\,\omega$, så för $\omega > 0$ är

$\hat{v}(\omega) = -\pi/\omega$, som är kontinuerlig.

För $\omega > 0$ är alltså $\hat{u}(\omega) = -\frac{4\pi}{\omega} + \hat{w}(\omega)$, och

$\omega\left(-\frac{4\pi}{\omega} + \hat{w}(\omega)\right) = -4\pi + \omega\hat{w}(\omega) \to -4\pi$ då $\omega \to 0+$.

7. u 2π-per., $u(t) = f(t)$ då $a \le t < b$, $u(t) = 0$ annars då $0 \le t < 2\pi$.

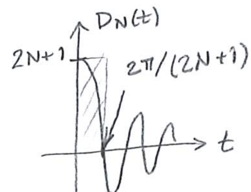
$$(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{int} = \sum_{-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_a^b f(r) e^{-inr}\, dr \right) e^{int} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(r) D_N(t-r)\, dr = \Big/ \; D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin t/2} \quad \text{(se 4.16)},$$

$$\text{sätt } P_N(t) = \int_0^t D_N(r)\, dr \Big/ \underset{\substack{\uparrow \\ f \in C^1}}{=} \frac{1}{2\pi} \Big[-f(r) P_N(t-r) \Big]_a^b + \frac{1}{2\pi} \int_a^b f'(r) P_N(t-r)\, dr.$$

D_N är jämn och svänger med avtagande amplitud på $[0, \pi]$,

så P_N är udda och $0 \le P_N(t) \le (2N+1) \cdot \frac{2\pi}{2N+1} = 2\pi$ då $t \in [0, \pi]$.



Av detta följer att P_N är begränsad, på kompakta intervall, oberoende av N. Eftersom $S_N u$ är periodisk följer att det finns ett $C \geq 0$, som beror på $\max|f|$, $\max|f'|$ och en begränsning av P_N, sådant att $|(S_N u)(t)| \le C$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och $N \in \mathbb{N}$.