Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2021-08-26 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Ange den lösning y till ekvationen $y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = 3$, $n \in \mathbb{N}$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 6$ och $y(1) = 4$.

2. Ange alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = \delta''$.

3. Antag att u är den 2π-periodiska funktion som ges av $u(t) = te^{it}$ då $0 \leq t < 2\pi$. Bestäm u:s fourierserie och ange fourierseriens summa i punkten $t = 0$.

4. (a) Bestäm andraderivatan i distributionsmening av funktionen $|t^2 - 1|$. (1p)

   (b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $t^2 u = \delta + t$. (2p)

5. Använd laplacetransform för att bestämma en lösning u till ekvationen
$$\int_{t-1}^{t} e^{-(t-r)} u(r)\, dr = (1 - e^{-t})\chi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6. Bestäm fouriertransformen av funktionen $u(t) = 1/\cosh t = 2/(e^t + e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Antag att $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ är 2π-periodisk och att det finns konstanter $C \geq 0$ och $\varepsilon > 0$ sådana att u:s fourierkoefficienter uppfyller $|\hat{u}(n)| \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$. Visa att u:s maclaurinserie $\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(0)\, t^k/k!$ är konvergent om $|t| < \varepsilon$.

Lycka till!