Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2022-10-26 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Ange den lösning y till ekvationen $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 4 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y(1) = 5$.

2. Ange alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \delta(t+1)$.

3. Antag att $u(t) = \cos t$ då $|t| \le \pi/2$ och att $u(t) = 0$ då $|t| > \pi/2$. Bestäm u:s fouriertransform och använd resultatet för att beräkna värdena på integralerna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\, d\omega \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)\cos\omega}{1-\omega^2}\, d\omega.$$

4. Bestäm en lösning u till ekvationen $u(t) + \displaystyle\int_0^t (e^{3r} - e^r)u(t-r)\, dr = e^{2t},\ t \ge 0.$

5. Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $tu' + 3u = \delta''' + 6\delta + 6$.

6. Visa att $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon} \right) = 0.$

7. Bestäm det minsta värdet, då $b_1, b_2, \ldots$ varierar över $\mathbb{C}$, av integralen
$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi + t} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \right|^2 dt.$$

Lycka till!