Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2023-01-04 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Låt y vara den lösning till ekvationen $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^t \cos t$, $t \geq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$. Ange

   (a) $(\mathscr{L}_+ y)(s)$, (b) $y(t)$.

2. Ange en lösning u till ekvationen $u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{r-t} u(r)\, dr = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Bestäm andraderivatan i distributionsmening av funktionen $|t^3 - 1|$. (1p)

   (b) Förenkla distributionen $t\delta'(2t)$. (1p)

   (c) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $tu' = t^2\chi + \delta_{-1}$. (1p)

4. Låt u vara den 2π-periodiska funktion som ges av $u(t) = \cos t$ då $0 \leq t < \pi/2$ och av $u(t) = 0$ då $\pi/2 \leq t < 2\pi$. Bestäm u:s fourierserie och ange fourierseriens summa i punkten $t = 0$.

5. Använd z-transform för att bestämma en lösning till ekvationen

$$u(n) - u(n-1) + u(n-2) + \sum_{k=3}^{\infty} 2(-1)^k u(n-k) = 3\chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Låt $u(t) = \sin n$ då $n \leq t < n+1$, för $n = 0, 1, 2, \ldots$, och låt $u(t) = 0$ då $t < 0$. Bestäm laplacetransformen av u.

7. Antag att $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion och att $u(t) = 1/t + \mathcal{O}(1/t^2)$ då $t \to \pm\infty$. Visa att u:s fouriertransform ges av en funktion som är kontinuerlig förutom en språngdiskontinuitet i origo, och bestäm $\hat{u}(0+) - \hat{u}(0-)$.

Lycka till!