Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2023-08-23 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Ange den lösning y till ekvationen $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 6 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$ och $y(1) = 4$.

2. För ett LTI-system S gäller att $y'' + 4y' + 3y = x''' + x'$ då $y = Sx$. Bestäm alla impulssvar som systemet S kan ha.

3. Låt funktionen u ha period 2π och ges av $u(t) = e^{iat}$ då $-\pi \leq t < \pi$, där $a \in \mathbb{R}$ *inte* är ett heltal. Bestäm u:s fourierserie och använd resultatet för att visa att
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{a-n} = \frac{\pi}{\tan a\pi}.$$

4. (a) Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att fouriertransformen av funktionen $u(t-a)$ är $e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$. (1p)

   (b) Antag att $u \in \mathcal{S}'$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att fouriertransformen av distributionen $u(t-a)$ är $e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$. (1p)

   (c) Antag att funktionerna $u(t)$ och $tu(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Visa att funktionen $tu(t)$ har fouriertransformen $i\hat{u}'(\omega)$. (1p)

5. Bestäm en lösning u till ekvationen $\displaystyle\int_{t-1}^{t} (1-t+r)u(r)\,dr = t\chi(t),\ t \in \mathbb{R}$.

6. Antag att $\mathscr{F}u = \lambda u$, där $0 \neq u \in \mathcal{S}'$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestäm möjliga värden på λ och visa att u är jämn eller udda.

7. Visa att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\,\frac{\sin(\omega/2^2)}{\omega/2^2}\cdots\frac{\sin(\omega/2^n)}{\omega/2^n}\,d\omega = \pi$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lycka till!