

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2023-10-25 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

- Lämna endast in svar!
- Låt y vara den lösning till ekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 5e^{-2t}$, $t \geq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = -3$. Ange
(a) $(\mathcal{L}_+ y)(s)$, (b) $y(t)$.
 - Ange en lösning u till ekvationen $\sum_{k=0}^n (k+1)u(n-k) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Förenkla distributionen $e^{3t}\delta''$. (1p)
(b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $(t+1)u = \delta_3 + t^2 + 1$. (2p)
 - Använd fouriertransform för att bestämma alla lösningar $y \in \mathcal{S}'$ till ekvationen
$$y''(t) - y(t) = 6\delta'(t) - 4e^{it} - 3e^{-2|t|}.$$
 - Antag att $u(t) = e^t$ då $0 \leq t < 2\pi$ och att u har period 2π . Visa att
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t) - (S_N u)(t)|^2 dt \leq \frac{(e^{2\pi} - 1)^2}{2\pi^2} \arctan \frac{1}{N}, \quad N \geq 1,$$
där $S_N u$ är den N :te symmetriska delsumman av u :s fourierserie.
 - Beräkna den enkelsidiga laplacetransformen av funktionen $u(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, $t > 0$.
 - Låt $u(t) = \arctan t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm u :s fouriertransform i distributionsmening.

Lycka till!