Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Utbildningskod: TATA77
Modul: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2024-01-03 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Låt y vara den lösning till ekvationen $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^{3t}$, $t \geq 0$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$. Ange

   (a) $(\mathscr{L}_+ y)(s)$, (b) $y(t)$.

2. Ange en lösning till differentialekvationen $y'(t) + 2y(t) = \delta'(t) + 3e^{-|t|}$.

3. Bestäm fourierserien för den funktion u som ges av $u(t) = e^t + e^{-t}$ då $-\pi \leq t < \pi$ och som har period 2π. Använd resultatet för att beräkna $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(n^2+1)$.

4. Sätt, för $n \geq 1$, $u_n(t) = n\cos nt$ då $|t| \leq \pi/2n$ och $u_n(t) = 0$ då $|t| > \pi/2n$. Bestäm gränsvärdet av följden u_n i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

5. Använd z-transform för att bestämma en lösning till differensekvationen

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Låt $y(t) = \underline{t}^{-1} * e^{-t^2/2}$ för $t \in \mathbb{R}$. Visa att y är en lösning till differentialekvationen

$$y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$ och att det finns konstanter $C \geq 0$ och $0 < \alpha \leq 1$ sådana att $|u(t+h) - u(t)| \leq C|h|^\alpha$ för alla $t, h \in \mathbb{R}$. Visa att det finns en konstant $D \geq 0$ sådan att u:s fourierkoefficienter uppfyller $|\hat{u}(n)| \leq D|n|^{-\alpha}$ för alla $n \neq 0$.

Lycka till!