Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2009–11–11 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Lös ekvationen $1 + \sqrt{7 - x} = x$.

2. (a) Bestäm med hjälp av kvadratkomplettering det minsta värdet av $3x^2 - 12x + 15$. (1p)

   (b) För vilka reella x gäller att $|2x - 1| + 4 = 3x$? (2p)

3. För vilka reella x gäller $\frac{2x}{x-3} \leq \frac{2x+1}{x}$?

4. (a) Lös ekvationen $3iz + (2 + i)\overline{z} = \frac{10}{2+i}$. (2p)

   (b) Bestäm radien samt medelpunkten för cirkeln $z\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$. (1p)

5. Bestäm för varje $a \in \mathbf{R}$ de komplexa tal z som uppfyller olikheten $|z - a| \leq |z| - a$.

Dugga 1 i TTIT02, 2009-11-11, lösningsförslag

1. $1+\sqrt{7-x}=x \Leftrightarrow \sqrt{7-x}=x-1 \Leftrightarrow 7-x=(x-1)^2,\ x-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-6=(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x+2)(x-3)=0,\ x\geq 1 \Leftrightarrow x=3.$
   Svar: $x=3$.

2. (a) $3x^2-12x+15=3(x^2-4x)+15=3((x-2)^2-4)+15=3(x-2)^2+3.$
   Minsta värdet 3 ges av $x=2$. Svar: 3.

   (b) $|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 \text{ om } x\geq 1/2 \\ -(2x-1) \text{ om } x\leq 1/2 \end{cases}.$
   Detta ger oss två fall.
   För $x\leq 1/2$ gäller att $|2x-1|+4=3x \Leftrightarrow -(2x-1)+4=3x \Leftrightarrow x=1>1/2$ som ej tillhör intervallet och således ej är en lösning.
   För $x\geq 1/2$ gäller att $|2x-1|+4=3x \Leftrightarrow 2x-1+4=3x \Leftrightarrow x=3>1/2$ som således är en lösning.
   Svar: $x=3$.

3. $\frac{2x}{x-3}\leq\frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3}-\frac{2x+1}{x}=\frac{5x+3}{x(x-3)}=\frac{5(x+\frac{3}{5})}{x(x-3)}\leq 0.$
   Teckentabellen

x		$-\frac{3}{5}$		0		3	
$x+\frac{3}{5}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{5(x+\frac{3}{5})}{x(x-3)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller för $x\leq -3/5$ eller $0<x<3$. Svar: Olikheten gäller för $x\leq -3/5$ eller $0<x<3$.

4. (a) $3iz+(2+i)\overline{z}=\frac{10}{2+i} \Leftrightarrow /z=x+iy/ \Leftrightarrow 3i(x+iy)+(2+i)(x-iy)=\frac{10(2-i)}{5}=4-2i \Leftrightarrow 2x-2y+i(4x-2y)=4-2i \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 4x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ 2x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow z=-3-5i.$ Svar: $z=-3-5i$.

   (b) $z\overline{z}=2Rez \Leftrightarrow /z=x+iy/ \Leftrightarrow x^2+y^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=(x-1)^2-1+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$, dvs cirkeln med radien 1 och medelpunkten $(1,0)$. Svar: Cirkeln med radien 1 och medelpunkten $(1,0)$.

5. $|z-a|\leq|z|-a \Leftrightarrow |z-a|^2\leq(|z|-a)^2$ och $|z|-a\geq 0 \Leftrightarrow /z=x+iy/ \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2\leq|z|^2-2a|z|+a^2=x^2+y^2-2a\sqrt{x^2+y^2}+a^2$ och $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq a \Leftrightarrow 2a(\sqrt{x^2+y^2}-x)\leq 0$ och $\sqrt{x^2+y^2}\geq a$.

   För $a\leq 0$ gäller olikheten för alla z eftersom $\sqrt{x^2+y^2}\geq x$ och $\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$.

   För $a>0$ gäller olikheten då $\sqrt{x^2+y^2}=x$ och $\sqrt{x^2+y^2}\geq a \Leftrightarrow z=\text{Re}z\geq a$. Svar: För $a\leq 0$ gäller olikheten för alla z och för $a>0$ om $z=Rez\geq a$.