Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2009–11–21 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Faktorisera $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ så långt som möjligt i reella faktorer. (1p)

   (b) Lös ekvationen $1 + \sqrt{2x^2 + 1} = 2x$. (2p)

2. För vilka reella x gäller $\frac{8-x}{2x-1} \leq x$?

3. För vilka reella x gäller att $|2x + 3| + 3x = |x - 2|$?

4. (a) Bestäm linjen genom $(-2, 2)$ som är vinkelrät mot linjen $3y - x + 3 = 0$. (1p)

   (b) Bestäm imaginärdelen av $\frac{2-i}{3+2i}$. (1p)

   (c) Lös ekvationen $z\overline{z} + \frac{\overline{z}}{1+2i} = |z|^2 + 1 - i$. (1p)

5. Bestäm för varje $a \in \mathbf{R}$ de reella tal x som uppfyller olikheten $\sqrt{2x - a} > \sqrt{2a - x}$.

Dugga 1 i TTIT02, 2009-11-21, lösningsförslag

1. (a) $x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^2+2x+2)=(x+1)((x+1)^2+1)$.
   Svar: $(x+1)(x^2+2x+2)$.

   (b) $1+\sqrt{2x^2+1}=2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow 2x^2+1=(2x-1)^2,\ 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-4x=2x(x-2)=0,\ x\geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=2$.
   Svar: $x=2$.

2. $\dfrac{8-x}{2x-1}\leq x \Leftrightarrow x-\dfrac{8-x}{2x-1}=\dfrac{2x^2-8}{2x-1}=\dfrac{2(x+2)(x-2)}{2x-1}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-\frac{1}{2}}\geq 0$.

   Teckentabellen

x		-2		$\frac{1}{2}$		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-2)}{x-\frac{1}{2}}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

   visar att olikheten gäller för $-2\leq x<1/2$ eller $x\geq 2$. Svar: Olikheten gäller för $-2\leq x<1/2$ eller $x\geq 2$.

3. $|2x+3|=\begin{cases} 2x+3 \text{ om } x\geq -3/2 \\ -(2x+3) \text{ om } x\leq -3/2 \end{cases}$.

   $|x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ om } x\geq 2 \\ -(x-2) \text{ om } x\leq 2 \end{cases}$.

   Detta ger oss tre fall.

   Fallet $x\leq -\dfrac{3}{2}$ ger ekvationen $-(2x+3)+3x=-(x-2) \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}>-\dfrac{3}{2}$. Således är det ej en lösning.

   Fallet $-\dfrac{3}{2}\leq x\leq 2$ ger ekvationen $2x+3+3x=-(x-2) \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{6}$ som tillhör intervallet och således är en lösning.

   Fallet $2\leq x$ ger ekvationen $2x+3+3x=x-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}<2$. Således är det ej en lösning.

   Svar: $x=-1/6$.

4. (a) Linjen $3y-x+3$ har riktningskoefficient $\dfrac{1}{3}$ och således är den sökta linjen på formen $y=-3x+l$. Insätts $(x,y)=(-2,2)$ i ekvationen fås att $l=-4$. Svar: $y=-3x-4$.

   (b) $\operatorname{Im}\dfrac{2-i}{3+2i}=\operatorname{Im}\dfrac{(2-i)(3-2i)}{9+4}=-\dfrac{7}{13}$. Svar: $-\dfrac{7}{13}$.

   (c) $z\overline{z}+\dfrac{\overline{z}}{1+2i}=|z|^2+1-i \Leftrightarrow /z\overline{z}=|z|^2/ \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}}{1+2i}=1-i \Leftrightarrow \overline{z}=3+i \Leftrightarrow z=3-i$. Svar: $z=3-i$.

5. För att rotuttrycken skall vara definierade måste $2x\geq a$ och $x\leq 2a \Leftrightarrow \dfrac{a}{2}\leq x\leq 2a$.

   Eftersom $\dfrac{a}{2}\leq 2a \Leftrightarrow a\geq 0$ följer att inga x uppfyller olikheten då $a<0$ och endast $x=0$ då $a=0$.

   För $\dfrac{a}{2}\leq x\leq 2a$ gäller att $\sqrt{2x-a}>\sqrt{2a-x} \Leftrightarrow 2x-a>2a-x \Leftrightarrow 3(x-a)>0 \Leftrightarrow x>a$.

Således gäller olikheten för $a < x \leq 2a$ om $a \geq 0$ och inga x uppfyller olikheten om $a < 0$. Svar: För $a < x \leq 2a$ om $a \geq 0$ och inga x uppfyller olikheten om $a < 0$.