Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2010–11–10 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. För vilka reella tal x gäller att $x - 2 < \frac{x+6}{2x-3}$?

2. (a) Bestäm med hjälp av kvadratkomplettering det minsta värdet av $2x^2 + 6x + 5$. (1p)

   (b) Skriv $\frac{3-i}{1+2i}$ på formen $a + ib$. (1p)

   (c) Lös ekvationen $\overline{z} + 2iz = 3 - i$. (1p)

3. Lös ekvationen $x + \sqrt{x+3} = 3$.

4. Bestäm alla lösningar till ekvationen $|x + 2|(1 - |x - 1|) = 1$.

5. För vilka reella tal a gäller att $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |xy| \leq a(x^2 + y^2)$?

Dugga 1 i TTIT02, 2010-11-10, lösningsförslag

1. $x - 2 < \dfrac{x+6}{2x-3} \Leftrightarrow x - 2 - \dfrac{x+6}{2x-3} = \dfrac{(x-2)(2x-3)-(x+6)}{2x-3} = \dfrac{2x^2-8x}{2x-3} = \dfrac{x(x-4)}{x-\frac{3}{2}} < 0.$

   Teckentabellen

x		0		$\frac{3}{2}$		4	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x(x-4)}{x-\frac{3}{2}}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

   visar att olikheten gäller för $x < 0$ eller $\dfrac{3}{2} < x < 4$.

   Svar: Olikheten gäller för $x < 0$ eller $\dfrac{3}{2} < x < 4$.

2. (a) $2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5 = 2((x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4})+5 = 2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$.
   Minsta värdet $1/2$ antas då $x = -3/2$. Svar: $1/2$.

   (b) $\dfrac{3-i}{1+2i} = \dfrac{(3-i)(1-2i)}{5} = \dfrac{1-7i}{5}$. Svar: $\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

   (c) $\overline{z} + 2iz = 3 - i \Leftrightarrow /z = x + iy/ \Leftrightarrow x - iy + 2ix - 2y = 3 - i \Leftrightarrow x - 2y + i(2x-y) = 3 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 2(3+2y) - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow z = -\dfrac{5+7i}{3}$. Svar: $z = -\dfrac{5+7i}{3}$.

3. $x + \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3 - x \Leftrightarrow x + 3 = (3-x)^2,\ 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = (x - \frac{7}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x-1)(x-6) = 0,\ x \leq 3 \Leftrightarrow x = 1.$
   Svar: $x = 1$.

4. $|x+2| = \begin{cases} x + 2 \text{ om } x \geq -2 \\ -(x+2) \text{ om } x \leq -2 \end{cases}$

   $|x-1| = \begin{cases} x - 1 \text{ om } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ om } x \leq 1 \end{cases}$.

   Detta ger oss tre fall.

   Fallet $x \leq -2$ ger ekvationen $-(x+2)(1+(x-1)) = 1 \Leftrightarrow -(x+2)x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$ som saknar lösning i intervallet.

   Fallet $-2 \leq x \leq 1$ ger ekvationen $(x+2)(1+(x-1)) = 1 \Leftrightarrow (x+2)x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) = 0$ som har lösningen $x = \sqrt{2} - 1$ i intervallet.

   Fallet $x \geq 1$ ger ekvationen $(x+2)(1-(x-1)) = 1 \Leftrightarrow (x+2)(2-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 3$ som har lösningen $\sqrt{3}$ i intervallet.

   Svar: Lösningarna är $x = \sqrt{2} - 1$ och $x = \sqrt{3}$.

5. Insätts exempelvis $x = y = 1$ i olikheten fås att $1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq \dfrac{1}{2}$ måste gälla.

$|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$. Eftersom den sista olikheten är gäller för alla x och y fås att $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

För $a > \dfrac{1}{2}$ fås att $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq a(x^2 + y^2)$. Således gäller $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |xy| \leq a(x^2 + y^2)$ omm $a \geq 1/2$. Svar: För $a \geq 1/2$.