Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2010–11–20 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till ekvationen $|2x-3|-3|x+1|=2x+1$.

2. (a) Faktorisera polynomet $18x-2x^3$. (1p)

   (b) Ange ekvationen för den räta linje som går genom punkten $(4,-3)$ och är vinkelrät mot linjen $y+4x=3$. (1p)

   (c) Bestäm $\left|\frac{(1-2i)^2}{(2-i)^2}\right|$. (1p)

3. För vilka reella tal x gäller att $\frac{2x-2}{2x-1} \leq \frac{3x}{3x+2}$?

4. Lös ekvationen $1+\sqrt{x^3+6x^2-5x-1}=2x$.

5. Låt $z \in \mathbf{C}$. Visa eller motbevisa påståendet att
   $||z-\overline{z}|-|z|| < |\overline{z}| \Leftrightarrow (z+\overline{z})(z-\overline{z}) \neq 0$.

Dugga 1 i TTIT02, 2010-11-20, lösningsförslag

1. $|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 \text{ om } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(2x-3) \text{ om } x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

   $|x+1|=\begin{cases} x+1 \text{ om } x \geq -1 \\ -(x+1) \text{ om } x \leq -1 \end{cases}.$

   Detta ger oss tre fall.

   Fallet $x \leq -1$ ger ekvationen $-(2x-3)+3(x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow x+6 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 5$. Således saknas lösning i intervallet.

   Fallet $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ ger ekvationen $-(2x-3)-3(x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow -5x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$ som tillhör intervallet och därmed är en lösning.

   Fallet $x \geq \frac{3}{2}$ ger ekvationen $2x-3-3(x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow -x-6 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}$. Således saknas lösning i intervallet.

   Svar: Lösningen är $x = -\frac{1}{7}$.

2. (a) $18x - 2x^3 = -2x(x^2-9) = -2x(x+3)(x-3)$.
   Svar: $18x - 2x^3 = -2x(x+3)(x-3)$.

   (b) Linjen $y+4x = 3$ har riktningskoefficienten -4. Då $\frac{1}{4}\cdot(-4) = -1$ har den sökta linjen ekvationen $y = \frac{x}{4} + m$. Insätts $x = 4$ och $y = -3$ fås att $m = -4$. Svar: $y = \frac{x}{4} - 4$.

   (c) $\left|\frac{(1-2i)^2}{(2-i)^2}\right| = \frac{|1-2i|^2}{|2-i|^2} = \frac{5}{5} = 1.$ Svar: 1.

3. $\frac{2x-2}{2x-1} \leq \frac{3x}{3x+2} \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2x-1} - \frac{3x}{3x+2} = \frac{(2x-2)(3x+2)-3x(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{x-4}{6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})} \leq 0.$

   Teckentabellen

x		$-2/3$		$1/2$		4	
$x+2/3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1/2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x-4}{6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})}$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

   visar att olikheten gäller för $x < -\frac{2}{3}$ eller $\frac{1}{2} < x \leq 4$.

   Svar: Olikheten gäller för $x < -\frac{2}{3}$ eller $\frac{1}{2} < x \leq 4$.

4. $1 + \sqrt{x^3+6x^2-5x-1} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^3+6x^2-5x-1} = 2x-1 \Leftrightarrow x^3+6x^2-5x-1 = (2x-1)^2,\ 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3+6x^2-5x-1-(2x-1)^2 = x^3+2x^2-x-2 = (x-1)(x^2+3x+2) = (x-1)(x+2)(x+1) = 0,\ x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$ Svar: $x = 1$.

5. $||z-\overline{z}|-|z|| < |\overline{z}| \Leftrightarrow -|\overline{z}| < |z-\overline{z}|-|z| < |\overline{z}| \Leftrightarrow /|\overline{z}| = |z|/ \Leftrightarrow 0 < |z-\overline{z}| < 2|z| \Leftrightarrow /z = x+iy/ \Leftrightarrow 0 < |2iy| < 2\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 0 < |y| < \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$ både $x \neq 0$ och $y \neq 0 \Leftrightarrow 4ixy = (z+\overline{z})(z-\overline{z}) \neq 0.$