Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2011–11–09 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Faktorisera polynomet $2x^3 + 2x^2 - 12x$. (1p)

   (b) Beräkna $\left|\frac{(1-i)^2}{2+i}\right|$. (1p)

   (c) Ange kvoten samt resten för polynomdivisionen $\frac{x^3-x^2+4x-8}{x^2+2}$. (1p)

2. Bestäm alla lösningar till ekvationen $x + 3|4 - x| = |x - 1| + 3$.

3. För vilka reella tal x gäller att $\frac{x-2}{x} \geq \frac{x-3}{x+1}$?

4. Lös ekvationen $\sqrt{\frac{6x-2}{x-2}} = x + 1$.

5. För vilka komplexa tal $A,\ B,\ C$ och D gäller att $Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D \in \mathbf{R}$ för alla $z \in \mathbf{C}$?

Dugga 1 i TTIT02, 2011-11-09, lösningsförslag

1. (a) $2x^3+2x^2-12x = 2x(x^2+x-6) = 2x((x+\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2) =$
$2x(x+3)(x-2)$. Svar: $2x(x+3)(x-2)$.

(b) $|\frac{(1-i)^2}{2+i}| = \frac{|1-i|^2}{|2+i|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Svar: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(c) $\frac{x^3-x^2+4x-8}{x^2+2} = \frac{x(x^2+2)-x^2+2x-8}{x^2+2} = x+\frac{-(x^2+2)+2x-6}{x^2+2} =$
$x-1+\frac{2x-6}{x^2+2}$.

Svar: Kvoten är $x-1$ och resten $2x-6$.

2. $|4-x| = |x-4| = \begin{cases} x-4 \text{ om } x \geq 4 \\ -(x-4) \text{ om } x \leq 4 \end{cases}$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ om } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ om } x \leq 1 \end{cases}$.

Detta ger oss tre fall.

Fallet $x \leq 1$ ger ekvationen $x-3(x-4) = -(x-1)+3 \Leftrightarrow x = 8 > 1$. Således ingen lösning.

Fallet $1 \leq x \leq 4$ ger ekvationen $x-3(x-4) = x-1+3 \Leftrightarrow -2x+12 = x+2 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. Detta är en lösning ty $1 < \frac{10}{3} < 4$.

Fallet $x \geq 4$ ger ekvationen $x+3(x-4) = x-1+3 \Leftrightarrow 3x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3}$. Detta är en lösning ty $4 < \frac{14}{3}$.

Svar: Lösningarna är $x = \frac{10}{3}$ och $x = \frac{14}{3}$.

3. $\frac{x-2}{x} \geq \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)-(x-3)x}{x(x+1)} =$
$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{2(x-1)}{x(x+1)} \geq 0$.

Teckentabellen

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2(x-1)}{x(x+1)}$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller för $-1 < x < 0$ eller $x \geq 1$.
Svar: Olikheten gäller för $-1 < x < 0$ eller $x \geq 1$.

4. $\sqrt{\frac{6x-2}{x-2}} = x+1 \Leftrightarrow \frac{6x-2}{x-2} = (x+1)^2$ och $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 6x-2 = (x^2+2x+1)(x-2);\ x \geq -1 \Leftrightarrow 6x-2 = x^3-3x-2,\ x \geq -1 \Leftrightarrow x^3-9x = x(x^2-9) = x(x+3)(x-3) = 0,\ x \geq -1 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 3$. Svar: $x = 0$ och $x = 3$.

5. Antag först att *) $Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D = A|z|^2 + Bz + C\overline{z} + D \in \mathbf{R}$ för alla $z \in \mathbf{C}$. $z = 0$ visar då att $D \in \mathbf{R}$. Således gäller att $A|z|^2 + Bz + C\overline{z} + D \in \mathbf{R} \Leftrightarrow A|z|^2 + Bz + C\overline{z} \in \mathbf{R}$.

   Sätt $A = A_1 + iA_2$, där $A_1,\ A_2 \in \mathbf{R}$, och antag att $A_2 \neq 0$. Då gäller att $|\mathrm{Im}(Ax^2 + (B+C)x)| > |A_2|x^2 - |B+C|x = x(|A_2|x - |B+C|) > 0$ om $x > \dfrac{|B+C|}{|A_2|}$ vilket motsäger *). Således är $A_2 = 0$, $A \in \mathbf{R}$ och $A|z|^2 + Bz + C\overline{z} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow Bz + C\overline{z} \in \mathbf{R}$.

   $z = 1$ visar att $B + C \in \mathbf{R}$ och $z = i$ visar att $i(B - C) \in \mathbf{R}$ måste gälla. Således att $\mathrm{Im}\, C = -\mathrm{Im}\, B$ och $\mathrm{Re}\, C = \mathrm{Re}\, B$ vilket är ekvivalent med $C = \overline{B}$.

   Antag omvänt att $A,\ D \in \mathbf{R}$ och att $C = \overline{B}$. Då följer att $A|z|^2 + Bz + C\overline{z} + D = A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + D = A|z|^2 + 2\ \mathrm{Re}\ Bz + D \in \mathbf{R}$ för alla $z \in \mathbf{C}$. Svar: För $A,\ D \in \mathbf{R}$ och $C = \overline{B}$.