Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2011–11–19 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Lös ekvationen $x + \sqrt{8 - x} = 2$.

2. För vilka reella tal x gäller att $x + 1 < \dfrac{15 - x}{x}$?

3. (a) Förenkla uttrycket $\dfrac{\frac{2y}{x}}{x^2 + 4xy + 4y^2} - \dfrac{1}{x^2 + 2xy}$ så långt som möjligt. (1p)

   (b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $|2x + 3| + 3x = 4$. (2p)

4. (a) Skriv $\dfrac{3 + i}{2 - i}$ på formen $a + ib$. (1p)

   (b) Ange radie och medelpunkt för cirkeln $z\overline{z} + z + \overline{z} = 4\mathrm{Im}z$. (2p)

5. Lös ekvationen $2x^2 + 4x = 4 + \sqrt{(x + 1)^2 + 1} - 1$.

Dugga 1 i TTIT02, 2011-11-19, lösningsförslag

1. $x+\sqrt{8-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{8-x}=2-x \Leftrightarrow 8-x=(2-x)^2$ och $2-x \geq 0 \Leftrightarrow 8-x=x^2-4x+4,\ x \leq 2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x+1)(x-4)=0,\ x \leq 2 \Leftrightarrow x=-1.$ Svar: $x=-1$.

2. $x+1<\frac{15-x}{x} \Leftrightarrow x+1+\frac{x-15}{x}=\frac{(x+1)x+x-15}{x}=\frac{x^2+2x-15}{x}=\frac{(x+1)^2-16}{x}=\frac{(x+5)(x-3)}{x}<0.$

   Teckentabellen

x		-5		0		3	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+5)(x-3)}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

   visar att olikheten gäller för $x<-5$ eller $0<x<3$.
   Svar: Olikheten gäller för $x<-5$ eller $0<x<3$.

3. (a) $\frac{\frac{2y}{x}}{x^2+4xy+4y^2}-\frac{1}{x^2+2xy}=\frac{2y}{x(x+2y)^2}-\frac{1}{x(x+y)}=\frac{2y-(x+2y)}{x(x+2y)^2}=-\frac{x}{x(x+2y)^2}=-\frac{1}{(x+2y)^2}$ om $x \neq 0$ och $x+2y \neq 0$.

   Svar: $-\frac{1}{(x+2y)^2}$ om $x \neq 0$.

   (b) $|2x+3|=\begin{cases} 2x+3 \text{ om } 2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \\ -(2x+3) \text{ om } x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

   Detta ger oss två fall.

   Fallet $x \leq -\frac{3}{2}$ ger ekvationen $-(2x+3)+3x=4 \Leftrightarrow x=7>-\frac{3}{2}$. Således ingen lösning.

   Fallet $x \geq -\frac{3}{2}$ ger ekvationen $2x+3+3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$. Detta är en lösning ty $\frac{1}{5}>-\frac{3}{2}$. Svar: $x=\frac{1}{5}$.

4. (a) $\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$ Svar: $1+i$.

   (b) $z\overline{z}+z+\overline{z}=4\,\mathrm{Im}\,z \Leftrightarrow /z=x+iy/ \Leftrightarrow x^2+y^2+x+iy+x-iy=4y \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-4y=(x+1)^2-1+(y-2)^2-4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$. Således cirkeln med medelpunkt $z=-1+2i$ och radie $\sqrt{5}$.

   Svar: Crkeln med medelpunkt $z=-1+2i$ och radie $\sqrt{5}$.

5. $2x^2+4x=\sqrt{(x+1)^2+1}-1 \Leftrightarrow /t=x^2+2x/ \Leftrightarrow 2t+1=\sqrt{t+2} \Leftrightarrow (2t+1)^2=t+2$ och $2t+1 \geq 0 \Leftrightarrow 4t^2+3t-1=4(t+1)(t-\frac{1}{4})=0,\ t \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow /t=x^2+x/ \Leftrightarrow x^2+2x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$

   Svar: $x=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.