

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs

2012-11-14 kl. 8.00 - 11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Faktorisera polynomet $x^3 - x^2 - 9x + 9$ så långt som möjligt. (1p)
(b) Lös ekvationen $iz + 2\bar{z} = 5 + 4i$. (1p)
(c) Beräkna $\sum_{k=2}^{100} (2k + 3)$. (1p)
2. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^2 + 2z - 4iz + 2 - 16i = 0$.
3. Bestäm alla reella tal x sådana att $2x - 1 \geq \frac{9}{2x - 1}$.
4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{2x^2 + 2x - 23} + 2 = x$.
5. Visa, med utgångspunkt i binomialkoefficientens definition, att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

för heltal n och k sådana att $n > k \geq 1$.

Lösningsskisser för TTIT02 2012-11-14

1. (a) Man kan gissa att $x = 1$ är en rot till polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$. Enligt faktorsatsen så delar $x - 1$ polynomet $p(x)$. Med hjälp av polynomdivision fås att $p(x)/(x - 1) = x^2 - 9$. Alltså kan vi skriva $p(x) = (x - 1)(x^2 - 9)$. Vi försöker faktorisera $x^2 - 9$ genom hitta rötter till detta polynom. Rötterna till $x^2 - 9$ är $x = 3$ och $x = -3$. Enligt faktorsatsen kan vi skriva $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ vilket ger att det ursprungliga polynomet kan faktoriseras som

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 1)(x + 3)(x - 3).$$

- (b) Genom att sätta $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$, blir ekvationen

$$\begin{aligned} i(x + iy) + 2(x - iy) &= 5 + 4i \Leftrightarrow \\ -y + 2x + i(x - 2y) &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Eftersom $x, y \in \mathbb{R}$ så löses denna ekvation när realdelarna i vänster- och högerledet är lika, och när imaginärdelarna i vänster- och högerledet är lika. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -y + 2x = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lösningen till ekvationen är således $z = 2 - i$.

- (c) Detta är en aritmetisk summa, eftersom skillnaden mellan två på varandra följande termer är 2. Det är 99 ($= 100 - 2 + 1$) termer i summan, första termen är 7, och sista termen är 203. Vi kan då beräkna summan som

$$\sum_{k=2}^{100} (2k + 3) = 99 \cdot \frac{7 + 203}{2} = 99 \cdot 105 = 10395.$$

2. Vi börjar med att kvadratkomplettera polynomet. Vi får

$$\begin{aligned} z^2 + 2z - 4iz + 2 - 16i &= (z + 1 - 2i)^2 - (1 - 2i)^2 + 2 - 16i \\ &= (z + 1 - 2i)^2 + 5 - 12i. \end{aligned}$$

Den ursprungliga ekvationen är alltså ekvivalent med

$$(z + 1 - 2i)^2 = -5 + 12i.$$

Vi inför en ny variabel $w = z + 1 - 2i$ och ekvationen ovan blir då $w^2 = -5 + 12i$. Denna ekvation löser vi genom att sätta $w = x + iy$ (där $x, y \in \mathbb{R}$), vilket ger

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -5 + 12i$$

som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Vi använder oss nu även av "hjelpekvationen", vilken fås genom att beräkna absolutbeloppet av varje sida i ekvationen $w^2 = -5 + 12i$; alltså $|w^2| = |-5 + 12i|$ vilket ger att $x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13$. Denna ekvation, tillsammans med $x^2 - y^2 = -5$ ger att $2x^2 = 8$, vilket ger att $x = 2$ eller $x = -2$. För att beräkna motsvarande värde på y , så använder vi ekvationen $2xy = 12$, vilket ger att $y = 3$ då $x = 2$ och $y = -3$ då $x = -2$. Detta ger två lösningar för ekvationen $w^2 = -5 + 12i$; nämligen, $w = 2 + 3i$ och $w = -2 - 3i$. Eftersom $z = w - 1 + 2i$ får vi lösningarna till den ursprungliga ekvationen som

$$z = 1 + 5i \quad \text{och} \quad z = -3 - i.$$

3. Vi börjar med att skriva om olikheten genom att skriva båda termerna på samma sida av olikhetstecknet och sedan på gemensam nämnare. Alltså

$$2x - 1 \geq \frac{9}{2x - 1} \Leftrightarrow 2x - 1 - \frac{9}{2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)^2 - 9}{2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2 - 4x - 8}{2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 1)}{2x - 1} \geq 0,$$

där den sista faktoriseringen fås genom att finna rötterna till polynomet $x^2 - x - 2$. Vi kan nu studera tecknet av vänsterledet genom följande teckentabell:

		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$2x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{2x-1}$	-	0	+	$\cancel{0}$	-	0	+

Från denna tabell följer det att $(x - 2)(x + 1)/(2x - 1) \geq 0$ då $-1 \leq x < 1/2$ och $x \geq 2$.

4. Vi börjar med att skriva om ekvationen (notera ekvivalens- och implikationspilarna):

$$\sqrt{2x^2 + 2x - 23} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x - 23} = x - 2 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2x - 23 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0.$$

Vi löser nu den uppkomna ekvationen med hjälp av kvadratkomplettering:

$$x^2 + 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 - 27 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ eller } x = -9.$$

Eftersom vi inte bara har skrivit om den ursprungliga ekvationen med ekvivalenta uttryck så måste vi kontrollera att dessa två lösningar är lösningar till den ursprungliga ekvationen.

$$\underline{x = 3}: \quad \sqrt{2x^2 + 2x - 23} + 2 = \sqrt{1} + 2 = x.$$

$$\underline{x = -9}: \quad \sqrt{2x^2 + 2x - 23} + 2 = 11 + 2 \neq x.$$

Alltså är endast $x = 3$ en lösning till ekvationen.

5. Från binomialkoefficientens definition får vi att

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

Eftersom $k(k-1)! = k!$ och $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$ får vi att

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

vilket avslutar beviset.