

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs

2013-11-20 kl. 8.00 - 11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och studentgrupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Skriv $\frac{2+i}{4-3i}$ på formen $a+bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)
(b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $|2x+1| = x-1$. (1p)
(c) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ så att $\sqrt{2x^2-x-2} = x$. (1p)
2. Bestäm de $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller olikheten

$$\frac{8x-2x^2}{3x+2} > 1.$$

3. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^2 - 3iz + i - 3 = 0$.
4. Beräkna summan

$$\sum_{k=-10}^{10} (3 + 3k + k^3 + 3^k).$$

5. För varje polynom $p(x)$ och $q(x)$ så finns det polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x) = q(x)k(x) + r(x),$$

där $r(x)$ har strikt mindre grad än $q(x)$. Använd detta för att visa följande påståenden:

- (a) Om $x-c$ delar polynomet $p(x)$ så är $p(c) = 0$. (1p)
- (b) Om $p(c) = 0$ så delar $x-c$ polynomet $p(x)$. (2p)

Lösningsskisser för TTIT02 2013-11-20

1. (a) För varje komplext tal $z \neq 0$ definieras $1/z = \bar{z}/|z|^2$, vilket ger att

$$\frac{2+i}{4-3i} = (2+i) \cdot \frac{4+3i}{4^2+3^2} = (2+i) \cdot \frac{4+3i}{25} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

- (b) Eftersom $2x+1=0$ då $x=-1/2$ så delar vi upp problemet i två fall. Vi antar först att $x \leq -1/2$. I detta intervall gäller det att $2x+1 \leq 0$ och vi har att

$$x \leq -1/2: \quad |2x+1| = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x+1) = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Eftersom $x=0$ inte uppfyller $x \leq -1/2$ så måste vi bortse från den lösningen (vi kan enkelt kontrollera att $x=0$ ej är en lösning). Låt oss nu anta att $x \geq -1/2$ vilket ger att $2x+1 \geq 0$ och vi har att

$$x \geq -1/2: \quad |2x+1| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Eftersom $x=0$ inte uppfyller $x \geq -1/2$ så måste vi bortse från den lösningen (vi kan också kontrollera att $x=0$ inte löser ekvationen). Då vi har undersökt ekvationen för alla x så drar vi slutsatsen att ekvationen saknar lösningar.

- (c) Genom att kvadrera båda sidor av ekvationen får vi

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-x-2} = x &\Rightarrow 2x^2-x-2 = x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 &\Leftrightarrow x-\frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=2 \text{ eller } x=-1. \end{aligned}$$

Eftersom vi ej har ekvivalens mellan alla steg, så måste vi pröva dessa rötter i ursprungsekvationen. Då $x=2$ fås

$$\sqrt{2x^2-x-2} - x = \sqrt{8-2-2} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 0,$$

och $x=-1$ ger

$$\sqrt{2x^2-x-2} - x = \sqrt{2-(-1)-2} - (-1) = \sqrt{1} + 1 = 2 \neq 0.$$

Alltså är $x=2$ den enda lösningen till den givna ekvationen.

2. Vi börjar med att se till att alla termer står på endast en sida av olikheten, samt att de står med en gemensam nämnare:

$$\frac{8x-2x^2}{3x+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8x-2x^2}{3x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2x^2-2}{3x+2} > 0.$$

Polynomet $5x-2x^2-2$ har rötterna 2 och $1/2$, vilket medför att $5x-2x^2-2 = -2(x-2)(x-1/2)$. Då vi använder detta i olikheten får vi

$$\frac{8x-2x^2}{3x+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)(x-1/2)}{3x+2} > 0,$$

och vi fortsätter genom att konstruera en teckentabell:

		-2/3		1/2		2	
$3x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1/2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
-2	-	-	-	-	-	-	-
$\frac{-2(x-2)(x-1/2)}{3x+2}$	+	$\neq$	-	0	+	0	-

Från teckentabellen avläser vi att $-2(x-2)(x-1/2)/(3x+2) > 0$ då

$$x < -\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{2} < x < 2.$$

3. Låt oss börja med att kvadratkomplettera ekvationen:

$$z^2 - 3iz + i - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3i}{2}\right)^2 + i - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - i$$

Nu sätter vi $w = z - 3i/2$ och löser först ekvationen $w^2 = 3/4 - i$ genom att sätta $w = x + iy$. Genom att jämföra realdelar och imaginärdelar i vänster- och högerledet fås

$$(x + iy)^2 = \frac{3}{4} - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{3}{4} \\ 2xy = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Vi använder oss nu av en extra ekvation (den så kallade "hjälp ekvationen"), som fås av

$$w^2 = \frac{3}{4} - i \Rightarrow |w|^2 = \left|\frac{3}{4} - i\right| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$$

Genom att addera denna ekvation till $x^2 - y^2 = 3/4$ fås att $x = \pm 1$. Genom att använda ekvationen $2xy = -1$ ger detta

$$\begin{aligned} x = 1 : \quad 2xy = -1 &\Leftrightarrow 2y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = -1 : \quad 2xy = -1 &\Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alltså har vi visat att ekvationssystemet (1) har lösningarna

$$(x, y) = (1, -1/2) \quad \text{eller} \quad (x, y) = (-1, 1/2),$$

vilket betyder att $w^2 = 3/4 - i$ har lösningarna

$$w = 1 - \frac{1}{2}i \quad \text{eller} \quad w = -1 + \frac{1}{2}i.$$

Eftersom $z = w + 3i/2$ ger detta slutligen att $z^2 - 3iz + i - 3$ har lösningarna

$$z = 1 + i \quad \text{eller} \quad z = -1 + 2i.$$

4. Vi börjar med att dela upp summan i 3 delar (som vi betecknar med S_1 , S_2 och S_3):

$$\sum_{k=-10}^{10} (3 + 3k + k^3 + 3^k) = \sum_{k=-10}^{10} (3 + 3k) + \sum_{k=-10}^{10} 3^k + \sum_{k=-10}^{10} k^3 = S_1 + S_2 + S_3.$$

Vi noterar att S_1 är en aritmetisk summa och att S_2 är en geometrisk summa, vilket ger att

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3 + 3 \cdot (-10) + 3 + 3 \cdot 10}{2} \cdot 21 = 3 \cdot 21 = 63 \\ S_2 &= \sum_{k=-10}^{10} 3^k = \frac{1}{3^{10}} + \dots + \frac{1}{3} + 1 + 3 + \dots + 3^{10} \\ &= \frac{1}{3^{10}} (1 + 3 + \dots + 3^{20}) = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^{20} 3^k = \frac{1}{3^{10}} \frac{3^{21} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} (3^{11} - 3^{-10}) \end{aligned}$$

Vad blir S_3 ? Det är enkelt att kontrollera att S_3 varken är en aritmetisk eller geometrisk summa. Däremot får man att

$$\begin{aligned} S_3 &= (-10)^3 + (-9)^3 + \dots + (-1)^3 + 0 + 1^3 + \dots + 9^3 + 10^3 \\ &= -10^3 + 10^3 - 9^3 + 9^3 + \dots - 1^3 + 1^3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Dessa uträkningar ger tillslut att

$$\sum_{k=-10}^{10} (3 + 3k + k^3 + 3^k) = S_1 + S_2 + S_3 = 63 + \frac{1}{2} (3^{11} - 3^{-10}).$$

5. (a) Vi antar att $x - c$ delar $p(x)$ och skall visa att $p(c) = 0$. Att $x - c$ delar $p(x)$ betyder att det finns ett polynom $k(x)$ sådant att

$$p(x) = (x - c)k(x)$$

eftersom resten $r(x) = 0$. Detta ger att $p(c) = (c - c)k(c) = 0$.

- (b) Vi antar att $p(c) = 0$ och skall visa att $x - c$ delar $p(x)$. Enligt uppgiften så vet vi att det finns polynom $k(x)$ och $r(x)$, där $r(x)$ har (strikt) mindre grad än $x - c$ ($= q(x)$), sådana att

$$p(x) = (x - c)k(x) + r(x)$$

Eftersom $r(x)$ har strikt mindre grad än $x - c$ så måste graden av $r(x)$ vara 0, vilket betyder att $r(x) = r \in \mathbb{R}$. Alltså har vi att

$$p(x) = (x - c)k(x) + r.$$

Nu använder vi antagandet att $p(c) = 0$ vilket ger att

$$0 = (c - c)k(c) + r \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.$$

Alltså, då $p(c) = 0$ finns det ett polynom $k(x)$ sådant att

$$p(x) = (x - c)k(x)$$

vilket innebär att $x - c$ delar $p(x)$ (ty resten är 0).