

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs

2013-11-30 kl. 8.00 - 11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $2\bar{z}(2+i) + 2z(1-i) = 11 - 4i$. (1p)

(b) Beräkna summan $\sum_{k=0}^{10} (1 + 5^k)$. (1p)

(c) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $|x-1| - 2x - 1 = 0$. (1p)

2. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.

3. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\sqrt{-5 + 9x - 5x^2 + x^3} = 1 - x.$$

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller olikheten

$$\frac{x(x^2 - x - 1)}{5x - 2 - 2x^2} \geq -1.$$

5. För varje heltal $n \geq 0$ definieras summan

$$S_n = \binom{n}{0} + i \binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + i^n \binom{n}{n}.$$

Visa att $|S_n| = (\sqrt{2})^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

Lösningsskisser för TTIT02 2013-11-30

1. (a) Vi sätter $z = x + iy$, med $x, y \in \mathbb{R}$, vilket ger att ekvationen blir ekvivalent med

$$2(x - iy)(2 + i) + 2(x + iy)(1 - i) = 11 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 4y - 2iy = 11 - 4i$$

Genom att jämföra real- och imaginärdelar fås att

$$6x + 4y - 2iy = 11 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 4y = 11 \\ 2y = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

vilket medför att lösningen till ekvationen ges av $z = \frac{1}{2} + 2i$.

- (b) Summan kan delas upp i två summor som

$$\sum_{k=0}^{10} (1 + 5^k) = \sum_{k=0}^{10} 1 + \sum_{k=0}^{10} 5^k = 11 + \sum_{k=0}^{10} 5^k.$$

Den kvarstående summan är geometrisk och vi beräknar

$$\sum_{k=0}^{10} (1 + 5^k) = 11 + \sum_{k=0}^{10} 5^k = 11 + \frac{5^{11} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(43 + 5^{11}).$$

- (c) Eftersom

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{om } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$$

så delar vi upp problemet i två fall.

$$x \geq 1: \quad |x - 1| - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

Eftersom $-2 < 1$ så bortser vi från denna lösning. I det andra fallet får vi

$$x \leq 1: \quad |x - 1| - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x - 1) - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

vilket är en lösning ty $0 \leq 1$ (vi kan också kontrollera detta direkt i ursprungsekvationen). Alltså är $x = 0$ den enda lösningen till ekvationen.

2. Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + 2 + 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 &= -2 - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Nu inför vi $w = z - (1 + i)/2$ vilket ger ekvationen

$$w^2 = -2 - \frac{3}{2}i.$$

För att finna w sätter vi $w = x + iy$ vilket ger

$$(x + iy)^2 = -2 - \frac{3}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vi använder oss också av den så kallade "hjelpekvationen":

$$w^2 = -2 - \frac{3}{2}i \quad \Rightarrow \quad |w|^2 = \left| -2 - \frac{3}{2}i \right| \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2},$$

och genom att addera denna ekvation till $x^2 - y^2 = -2$ fås att $x = \pm \frac{1}{2}$. Då vi sätter in dessa lösningar i ekvationen $2xy = -3/2$ får vi att

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} : \quad 2 \cdot \frac{1}{2} y &= -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y &= -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Detta ger att alla lösningar till $w^2 = -2 - 3i/2$ ges av

$$w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{eller} \quad w = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,$$

och eftersom $z = w + (1+i)/2$ ger detta att

$$z = 1 - i \quad \text{eller} \quad z = 2i.$$

3. Vi noterar att ekvationen endast kan ha lösningar x som uppfyller $1-x \geq 0$, eftersom vänsterledet alltid är positivt (kom ihåg att roten ur ett positivt reellt tal alltid är positivt). Under antagandet att $x \leq 1$ gäller följande ekvivalenser:

$$\begin{aligned} \sqrt{-5+9x-5x^2+x^3} = 1-x &\Leftrightarrow -5+9x-5x^2+x^3 = (1-x)^2 \Leftrightarrow \\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Polynomet $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ har en rot då $x = 1$. Faktorsatsen säger då att $x-1$ är en faktor i $p(x)$ och med hjälp av polynomdivision får vi att

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

Det ovanstående andragradspolynomet har rötter i $x = 2$ och $x = 3$ (vilket vi ser genom att lösa andragradsekvationen $x^2 - 5x + 6 = 0$ med hjälp av kvadratkomplettering), vilket betyder att alla lösningar till $p(x) = 0$ ges av $x = 1$, $x = 2$ eller $x = 3$. Alltså får vi att

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{-5+9x-5x^2+x^3} = 1-x \\ x \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = 1 \text{ eller } x = 2 \text{ eller } x = 3 \\ x \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Eftersom vi har ekvivalens mellan alla påståenden så kan vi dra slutsatsen att $x = 1$ är den enda lösningen till den ursprungliga rotekvationen.

4. Vi börjar med att flytta över alla termer till ena sidan av olikheten och sedan faktorisera täljare och nämnare så långt det går. Alltså

$$\frac{x(x^2 - x - 1)}{5x - 2 - 2x^2} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{5x - 2 - 2x^2} \geq 0.$$

För att faktorisera tredjegradspolynomet $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ noterar vi att $p(1) = 0$, vilket enligt faktorsatsen ger att $x-1$ är en faktor i $p(x)$. Med hjälp av polynomdivision fås

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2),$$

och för att faktorisera polynomet vidare hittar vi rötterna till $q(x) = x^2 - 2x + 2$ med hjälp av kvadratkomplettering:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = -1.$$

Eftersom kvadraten av ett reellt tal aldrig kan vara negativt säger detta att polynomet $q(x)$ inte har några reella rötter. Alltså har $q(x)$ samma tecken för *alla* x (eftersom om $q(x)$ byter tecken så måste polynomets värden passera 0, vilket betyder att det finns en reell rot och detta motsäger att det inte finns några reella rötter). Vi noterar att $q(0) = 2$ och vi sluter oss med hjälp av ovanstående

resonemang till att $q(x) > 0$ för alla x . Vi faktorerar nu polynomet i nämnaren $r(x) = 5x - 2 - 2x^2$ genom att hitta dess rötter:

$$5x - 2 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{3}{4} + \frac{5}{4},$$

vilket gör att vi kan faktorisera $r(x)$ som

$$5x - 2 - 2x^2 = -2(x - 2)(x - 1/2).$$

Med hjälp av dessa beräkningar har vi således visat att

$$\frac{x(x^2 - x - 1)}{5x - 2 - 2x^2} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)}{-2(x - 2)(x - \frac{1}{2})} \geq 0,$$

och vi går vidare genom att konstruera en teckentabell för detta uttryck.

		1/2		1		2	
$x - 1/2$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+	+	+	+	+
-2	-	-	-	-	-	-	-
$\frac{(x-1)(x^2-2x+2)}{-2(x-2)(x-\frac{1}{2})}$	+	$\cancel{0}$	-	0	+	$\cancel{0}$	-

Från denna tabell avläser vi att $\frac{x(x^2-x-1)}{5x-2-2x^2} \geq -1$ då

$$x < \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad 1 \leq x < 2.$$

5. Vi noterar att då $n \geq 0$ är ett heltal så kan man skriva summan som

$$S_n = \binom{n}{0} + i \binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + i^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} i^k$$

Binomial satsen säger oss att

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

vilket, då $a = 1$ och $b = i$, medför att

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} i^k = (1 + i)^n.$$

Alltså har vi visat att

$$|S_n| = |(1 + i)^n| = |1 + i|^n = (\sqrt{2})^n.$$