

Dugga 1 i Inledande matematisk analys

2014-11-19 kl. 8.00 - 11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och studentgrupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Svar och lösningsförslag finns på kurshemsidan efter tentamens slut. *Lycka till!*

1. (a) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{20} \frac{2^n}{3^{n-1}}$. (1p)

(b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $|2x - 1| = x - 2$. (1p)

(c) Skriv $\frac{5 + 10i}{3 - 4i}$ på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)

2. Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller

$$\frac{x^2 - 5x + 10}{6 - 3x} > 2.$$

3. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{x + 2} + \sqrt{2x - 4} = 2$.

5. Beräkna resten då polynomet $p(x) = x^{2014} + 1$ divideras med $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Lösningsskisser för TATA79 2014-11-19

1. (a) Vi skriver om summan som

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{19} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2 \sum_{n=0}^{19} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

och noterar att det är en geometrisk summa med kvot $2/3$. Detta ger oss

$$2 \sum_{n=0}^{19} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{20} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right) = 6 - \frac{2^{21}}{3^{19}}.$$

- (b) Vi finner alla lösningar till ekvationen genom att först hitta lösningar för x sådana att $2x-1 \geq 0$ (fall 1) och sedan för x sådana att $2x-1 \leq 0$ (fall 2). I det första fallet gäller det att $x \geq 1/2$ och $|2x-1| = 2x-1$. För dessa x är ekvationen $|2x-1| = x-2$ ekvivalent med

$$2x-1 = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,$$

men eftersom detta x ej ligger inom det givna intervallet ($x \geq 1/2$), så bortser vi från detta x . I det andra intervallet gäller det att $x \leq 1/2$ och $|2x-1| = -2x+1$. För dessa x är ekvationen $|2x-1| = x-2$ ekvivalent med

$$-2x+1 = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

men eftersom detta ej ligger inom det givna intervallet $x \leq 1/2$, så bortser vi även från detta x . Då vi har undersökt alla reella x , drar vi slutsatsen att ekvationen $|2x-1| = x-2$ ej har någon lösning.

- (c) Genom att förlänga bråket med nämnarens konjugat fås

$$\frac{5+10i}{3-4i} = \frac{(5+10i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-25+50i}{25} = -1+2i.$$

2. Låt oss börja med att skriva om olikheten så att alla termer har en gemensam nämnare

$$\frac{x^2-5x+10}{6-3x} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-5x+10}{6-3x} - \frac{2(6-3x)}{6-3x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-2}{6-3x} > 0.$$

Därefter faktorerar vi täljaren genom att finna lösningarna till

$$x^2+x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \\ x=1 \quad \text{eller} \quad x=-2,$$

vilket ger att $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$. Sätter vi in detta i olikheten får vi

$$\frac{x^2+x-2}{6-3x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)}{6-3x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x-2} < 0.$$

Vi gör nu en teckentabell för dessa tre faktorer:

		-2		1		2	
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$	-	0	+	0	-	-	+

Från denna tabell avläser vi att $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} < 0$ då

$$x < -2 \quad \text{eller} \quad 1 < x < 2$$

3. Med hjälp av kvadratkomplettering fås

$$\begin{aligned} z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0 &\Leftrightarrow \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+i}{2}\right)^2 + 4 + 3i = 0 \Leftrightarrow \\ \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 &= -2 - \frac{3i}{2}. \end{aligned}$$

Nu inför vi $w = z - (3+i)/2$ och löser först ekvationen

$$w^2 = -2 - \frac{3i}{2}, \quad (1)$$

genom att sätta $w = x + iy$, vilket ger

$$(x + iy)^2 = -2 - \frac{3i}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -2 - \frac{3i}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

För att enklare lösa detta ekvationssystem så härleder vi en hjälpekvation från (1). Nämligen, genom att ta absolutbeloppet av båda sidor i ekvation (1) fås

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2},$$

vilket tillsammans med $x^2 - y^2 = -2$ ger att

$$2x^2 = -2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

Genom att sätta in dessa lösningar i ekvationen $2xy = -3/2$ fås:

$$\begin{aligned} \underline{x = 1/2}: \quad y &= -\frac{3}{2} \\ \underline{x = -1/2}: \quad -y &= -\frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Alltså har vi visat att $w_1 = (1 - 3i)/2$ och $w_2 = (-1 + 3i)/2$ löser ekvationen $w^2 = -2 - 3i/2$. Detta ger att den ursprungliga ekvationen har lösningarna

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + \frac{3+i}{2} = 2 - i \\ z_2 &= w_2 + \frac{3+i}{2} = 1 + 2i. \end{aligned}$$

4. Vi beräknar

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-4} = 2 &\Rightarrow x + 2 + 2x - 4 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{2x-4} = 4 \Rightarrow \\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{2x-4} &= 6 - 3x \Rightarrow 4(x+2)(2x-4) = 36 + 9x^2 - 36x \Rightarrow \\ x^2 - 36x + 68 &= 0. \end{aligned}$$

Denna ekvation löser vi med hjälp av kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} x^2 - 36x + 68 = 0 &\Leftrightarrow (x - 18)^2 - 18^2 + 68 = 0 \Leftrightarrow (x - 18)^2 = 256 \Leftrightarrow \\ x - 18 &= \pm 16 \Leftrightarrow x = 34 \text{ eller } x = 2. \end{aligned}$$

Eftersom vi inte har ekvivalens mellan dessa lösningar och ursprungsekvationen, så måste vi pröva lösningarna:

$$\begin{aligned} \underline{x = 34}: \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-4} - 2 &= \sqrt{36} + \sqrt{64} - 2 = 6 + 8 - 2 = 12 \\ \underline{x = 2}: \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-4} - 2 &= \sqrt{4} + \sqrt{0} - 2 = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att $x = 2$ är den enda lösningen till ekvationen.

5. Vid polynomdivision fås

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x)$$

där $k(x)$ betecknar kvoten och $r(x)$ betecknar resten, som är sådan att $\text{grad } r(x) < \text{grad } q(x)$. I detta fall har $q(x)$ grad 2, vilket betyder att $r(x)$ har grad 1, och vi ansätter

$$r(x) = ax + b.$$

Vi får således

$$p(x) = k(x)(x^2 - 3x + 2) + ax + b \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = k(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b$$

vid faktorisering av $x^2 - 3x + 2$. Eftersom likhet mellan två polynom innebär likhet för alla $x \in \mathbb{R}$, så kan vi välja att betrakta ovanstående uttryck för $x = 1$ och $x = 2$:

$$\begin{aligned} p(1) &= k(1)(1 - 1)(1 - 2) + a + b & \Leftrightarrow & \quad p(1) = a + b \\ p(2) &= k(2)(2 - 1)(2 - 2) + 2a + b & \Leftrightarrow & \quad p(2) = 2a + b. \end{aligned}$$

Från dessa två ekvationer kan vi lösa ut a och b :

$$\begin{cases} a + b = p(1) \\ 2a + b = p(2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = p(1) - a \\ 2a + p(1) - a = p(2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2p(1) - p(2) \\ a = p(2) - p(1) \end{cases}.$$

Detta ger alltså $r(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} r(x) &= (p(2) - p(1))x + 2p(1) - p(2) = (2^{2014} + 1 - (1^{2014} + 1))x + 2(1^{2014} + 1) - 2^{2014} - 1 \\ &= (2^{2014} - 1)x - 2^{2014} + 3. \end{aligned}$$