Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TTIT02
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2009–12–07 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Lös ekvationen $\ln(x-3) = \ln(8-x) - \ln x$. (2p)

   (b) För vilka reella x gäller att $2^{x+1} = 2 \cdot 4^{\sqrt{x}}$? (1p)

2. (a) Lös ekvationen $\cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \cos(x - \pi)$. (1p)

   (b) Bestäm $C > 0$ och $\phi \in [0, \pi]$ så att $\sqrt{3}\sin x + \cos x = C\sin(x + \phi)$ för alla $x \in \mathbf{R}$. (2p)

3. (a) Beräkna summan $7 + 11 + 15 + \cdots + 203 + 207$. (1p)

   (b) I en geometrisk summa med 7 termer är den andra termen 1 och den femte termen $\frac{1}{8}$. Beräkna summan. (2p)

4. (a) Skriv $\cos^2 3x \cdot \sin 4x$ som en summa av cosinus- och/eller sinustermer. (2p)

   (b) Finn alla komplexa tal z som uppfyller $z^4 + 1 = 0$. (1p)

5. (a) Förenkla $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}})$. (1p)

   (b) Förenkla $\cos\arctan\frac{1}{2}$. (1p)

   (c) Bestäm $\sin 2v$ om $\cos v = \frac{2}{3}$ och $0 \le v \le \pi$. (1p)

6. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1,\ x \le 0$ samt inversens definitions- och värdemängd.

7. För vilka $x \in [0, 2\pi]$ gäller att $\arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x) = 0$?

Dugga 2 i TTIT02, 2009-07-12, lösningsförslag

1. (a) Uttrycken är definierade då $x-3>0, 8-x>0$ och $x>0$ dvs då $3<x<8$.

   För $3<x<8$ gäller att $\ln(x-3)=\ln(8-x)-\ln x \Leftrightarrow \ln(x-3)+\ln x=\ln(8-x) \Leftrightarrow \ln x(x-3)=\ln(8-x) \Leftrightarrow$ / ln strängt växande / $\Leftrightarrow x^2-3x=8-x \Leftrightarrow x^2-2x-8=(x-4)(x+2)=0$ som endast har lösningen $x=4$ i intervallet. Svar: $x=4$.

   (b) $2^{x+1}=2\cdot 4^{\sqrt{x}}=/4^{\sqrt{x}}=(2^2)^{\sqrt{x}}=2^{2\sqrt{x}}/=2^{2\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow$ / exponentialfunktionen är strängt växande / $\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x=2\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-4x=x(x-4)=0$ och $x\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ eller $x=4$. Svar: $x=0$ eller $x=4$.

2. (a) $\cos(3x+\frac{\pi}{3})=\cos(x-\pi)\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=x-\pi+n2\pi$ eller $3x+\frac{\pi}{3}=-(x-\pi)+n2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+n\pi$ eller $x=\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{2}$. Svar: $x=-\frac{2\pi}{3}+n\pi$ eller $x=\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{2}$ där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x) = /\cos\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\sin\phi=\frac{1}{2}$ om $\phi=\frac{\pi}{6}/=2(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. Svar: $C=2$ och $\phi=\frac{\pi}{6}$.

3. (a) $7+11+\cdots+203+207=\sum_{k=0}^{50}(7+k\cdot 4)=[$ aritmetisk summa med 51 termer $]=51\cdot\frac{7+207}{2}=51\cdot 107=5457$. Svar: 5457.

   (b) Låt $a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+aq^6=\sum_{k=0}^{6}aq^k=a\frac{q^7-1}{q-1}$ vara summan. Då gäller att $\begin{cases} aq=1\\ aq^4=\frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aq=1\\ \frac{aq^4}{aq}=q^3=\frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\frac{1}{2}\\ a=2\end{cases}$. Således är summan $2\frac{(1/2)^7-1}{1/2-1}=4-\frac{1}{2^5}$. Svar: $4-\frac{1}{2^5}$.

4. (a) $\cos^2 3x\cdot\sin 4x = /\text{Euler}/ = (\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2})^2\cdot(\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i}) = \frac{1}{8i}(e^{i6x}+2+e^{-i6x})(e^{i4x}-e^{-i4x}) = \frac{1}{8i}(e^{i10x}-e^{-i10x}+2(e^{i4x}-e^{-i4x})-e^{i2x}+e^{-i2x}) = \frac{1}{4}(\sin 10x+2\sin 4x-\sin 2x)$. Svar: $\frac{1}{4}(\sin 10x+2\sin 4x-\sin 2x)$.

   (b) $z^4+1=0\Leftrightarrow z^4=-1\Leftrightarrow /z=re^{i\phi}, -1=e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)}/\Leftrightarrow r^4e^{i4\phi}=e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)}\Leftrightarrow \begin{cases} r=1\\ 4\phi=\pi+n\cdot 2\pi,\ n=0,1,2,3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1\\ \phi=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2},\ n=0,1,2,3\end{cases}$.
   Rötterna är således $z_n=e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})},\ n=0,1,2,3$ eller $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\pm i)$. Svar: $z_n=e^{i\frac{\pi+2n}{4}},\ n=0,1,2,3$.

5. (a) $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$. Svar: $-\frac{\pi}{4}$.

(b) Rita en rätvinklig triangel med kateterna 1 respektive 2. Då blir hypotenusan $\sqrt{5}$. Ur triangeln följer att $\cos(\arctan\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Svar: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(c) $\cos v = \frac{2}{3}$ och $0 \le v \le \pi \Rightarrow \sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ty $\sin v \ge 0$ då $0 \le v \le \pi$. Härav följer att $\sin 2v = 2\sin v\cos v = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$. Svar: $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

6. $f(x) = e^{2x} - 2\cdot e^x + 1 = (e^x-1)^2$ och $D_f =]-\infty, 0] = V_{f^{-1}}$ om inversen f^{-1} existerar.

$y = (e^x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(e^x-1)^2} = |e^x - 1| = /e^x \le 1$ då $x \le 0/ = 1 - e^x \Leftrightarrow e^x = 1-\sqrt{y} \Leftrightarrow x = \ln(1-\sqrt{y})$. Således gäller att $f^{-1}(y) = \ln(1-\sqrt{y})$ som är definierad då $y \ge 0$ och $1-\sqrt{y} > 0 \Leftrightarrow 0 \le y < 1$. Svar: $f^{-1}(x) = \ln(1-\sqrt{x})$, $D_{f^{-1}} = [0,1[$ och $V_{f^{-1}} = D_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$.

7. Eftersom $\arcsin t > 0$ då $0 < t \le 1$ och $\arccos t \ge 0$ saknar ekvationen $\arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x) = 0$ lösning för $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ty då är $\cos x > 0$.

Även för $\pi < x < 2\pi$ saknas lösning ty då är $\sin x < 0$ och därmed $\arccos(\sin x) > \frac{\pi}{2} \ge -\arcsin(\cos x)$ $(-\frac{\pi}{2} \le \arcsin t \le \frac{\pi}{2})$.

Notera att $\arcsin(\sin t) = t$ då $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ och att $\arccos(\cos t) = t$ då $0 \le t \le \pi$.

För $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ gäller att $\arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) + \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$ / cos är en jämn funktion/ $= \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) + \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = / -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le 0,\ 0 \le x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}/ = \frac{\pi}{2} - x + x - \frac{\pi}{2} = 0$. Således löser alla $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ekvationen. Svar: $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$